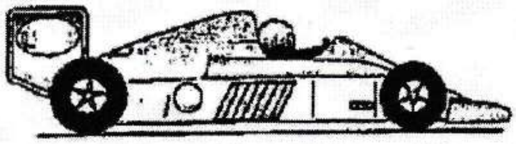
TD 1

Mouvement rectiligne accéléré

Exercice 1

Une voiture de formule 1 effectue la distance 0-1 000 m, départ arrêté, en 19 secondes. Si le mouvement est supposé rectiligne et uniformément accéléré, déterminer l'accélération du véhicule et sa vitesse au bout des 1 000 m.



$t_0 = 0$ $\quad$ $x(t_1) = 1000\,m$ $\quad$ $a = \frac{2x(t_1)}{t_1^2}$ $\quad$ AN= $\frac{2 \times 1000}{19^2} = 5,54\ m/s^2$

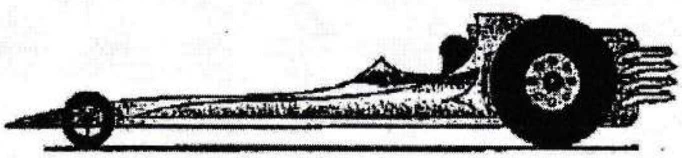
$t_1 = 19s$ $\quad$ $v(t_1) = a\,t_1$ $\quad$ $v(t_1) = 5,54 \times 19 = 105,26\ m/s$.

Exercice 2

Aux Etats-Unis, les compétitions entre dragsters sont classiques. Le vainqueur est celui qui, départ arrêté, parcourt le plus vite une distance imposée. Un des dragsters atteint la vitesse de 280km/h entre 0 et 400 m. Si le mouvement est supposé rectiligne uniformément accéléré, déterminer l'accélération de l'engin et le temps mis pour parcourir les 400m.

$v(t_1)$ 280 000 m/h = $1,008\,10^3$ m/s

$x(t_1) = 400m$



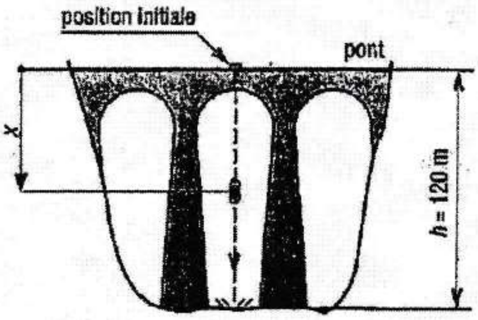
$a = \frac{v^2(t_1)}{2x(t_1)} = \frac{(77,78)^2}{2 \times 400} = 7,56\ m/s^2$

$t_1 = ?$ On utilise $x(t_1) = 400m$

$v(t_1) = a\,t_1$ de $t_1 = \frac{v(t_1)}{a}$ $\quad$ AN= $t_1 = \frac{77,78}{7,56} = 10,28\ s$.

Exercice 3

Pour le tournage d'un film d'action, on prépare avec précision la scène où une automobile tombe du haut d'un pont et fait une chute sur la hauteur $h = 120m$. La résistance de l'air est négligée, $g = 9,81\ m.s^{-2}$ est l'accélération du mouvement.



Déterminer les équations du mouvement, déterminer la durée de la chute et la vitesse d'arrivée au fond du ravin.

$h = 120m$ $\quad$ $g = 9,81\ m.s^{-2}$

$x(t) = \frac{1}{2} a t^2$

$t = \sqrt{\frac{2x(t)}{a}}$ $\quad$ $t = \sqrt{\frac{240}{9,81}} = 4,95\ s$

$V(t_1) = a\,t_1$

$= 9,81 \times 4,95$

$= 48,56\ m.s^{-1}$

EXERCICE 4 :

Une flèche est lancée vers le haut avec la vitesse de 20 m.s⁻¹
On suppose qu'elle est soumise à la seule accélération de pesanteur

$a = -g = -10\ m s^{-1}$

1) Écrire les équations du mvt :
2) Déterminer la hauteur h atteinte (= hauteur max)
3) Ainsi que le tps t_1 nécessaire à atteindre h.

1) Équat° du mvt

$a = -g$ $\qquad v(t) = at + v_0 = -gt + v_0$

$x(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + \cancel{x_0}$

$(v_0 = 20 m.s^{-1})$ $(g = 10 m s^{-1})$

$v^2(t_1) - v^2(t_0) = 2a[x(t_1) - x(t_0)]$

A t_1 la vitesse est nulle.

$0 - v^2 = -2g[h - 0]$

$v_0^2 = 2gh$ $\quad h = \frac{v_0^2}{2g}$

AN = $h = \frac{20^2}{2 \times 10} = 20 m$

Tps nécessaire t_1 = $v(t_1) = -gt_1 + v_0$

$t_1 = \frac{v_0}{g}$

TD 2

Cinématique

Exercice 1

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, le vecteur position d'un point M, est tel que : $M\left|\begin{array}{l} x(t) = t \\ y(t) = kt^2 \end{array}\right.$ t désigne le temps ($t \geq 0$) et k est une constante strictement positive.

- Déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire du point M. $y = y(x)$ $\quad y = kx^2$
- Quelle est sa nature ? C'est une parabole
- Déterminer les composantes de sa vitesse et de son accélération.
- Exprimer leurs modules

$\vec{v}\begin{cases} v_x(t) = \dot{x}(t) = 1 = \dfrac{d(t)}{dt} \\ v_y(t) = \dot{y}(t) = 2kt = \dfrac{d(kt^2)}{dt} \end{cases}$ $\quad \vec{a}\begin{cases} a_x(t) = \dot{v}_x(t) = \dfrac{d1}{dt} = 0 \\ a_y(t) = \dot{v}_y(t) = \dfrac{d2kt}{dt} = 2k \end{cases}$

Module de la vitesse
$\|\vec{v}\| = \sqrt{1+(2kt)^2} = \sqrt{1+4k^2t^2}$
Module de l'accélération
$\|\vec{a}\| = \sqrt{(2k)^2} = \sqrt{4k^2} = 2k$

Exercice 2

Relativement à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, un point matériel M décrit, en fonction du temps $t \in \left[0, \frac{2\pi}{\omega}\right]$, la cycloïde d'équations ~~cartésiennes~~ : paramétriques :

$$\begin{cases} x(t) = R(\omega t - \sin\omega t) \\ y(t) = R(1 - \cos\omega t) \end{cases} \quad \text{avec } (R,\omega) \in \mathbb{R}^2$$

$(\sin\omega t)' = \omega\cos\omega t$
$(\cos\omega t)' = -\omega\sin\omega t$

Montrer que les modules de ses vitesse v et accélération a, s'écrivent respectivement :

$$\|\vec{v}\| = 2R\omega\sin\frac{\omega t}{2}$$

$$a = R\omega^2$$

$\vec{v}\begin{cases} v_x(t) = \dot{x}(t) = R(\omega - \omega\cos\omega t) \\ v_y(t) = \dot{y}(t) = R(0 + \omega\sin\omega t) \end{cases}$ $\quad \vec{a}\begin{cases} a_x(t) = R(0 + \omega^2\sin\omega t) \\ a_y(t) = R(\omega^2\cos\omega t) \end{cases}$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{R^2(\omega - \omega\cos\omega t)^2 + R^2(\omega\sin\omega t)^2} = R\sqrt{\omega^2 - 2\omega^2\cos\omega t + \omega^2\cos^2\omega t + \omega^2\sin^2\omega t} = R\omega\sqrt{1 - 2\cos\omega t + \cos^2\omega t + \sin^2\omega t} = R\omega\sqrt{2 - 2\cos\omega t} = R\omega\sqrt{2 - 2 + 4\sin^2\frac{\omega t}{2}}$

$\|\vec{a}\| = \sqrt{(R^2(\omega^2\sin\omega t)^2 + (R^2(\omega^2\cos\omega t))^2} = R\sqrt{\omega^4\sin^2\omega t + \omega^4\cos^2\omega t} = R\omega^2$

Exercice 3

A - Un point mobile se déplace sur un arc de parabole entre les instants t_A et t_B. On pose $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

M part de A(4,0) à l'instant t = 0, passe en C à l'instant $t_C = \frac{T}{4}$ et arrive en B à l'instant $t_B = \frac{T}{2}$.

Son vecteur position $\overrightarrow{OM(t)}$, à chaque instant est donné, dans le repère cartésien $(O;\vec{i},\vec{j})$, par :

$$\overrightarrow{OM(t)} = 2\alpha(1 + \cos\omega t).\vec{i} + \alpha\sin^2\omega t.\vec{j}$$

où α et ω sont des constantes positives.

On posera : $\begin{array}{l} v_0 = 2\alpha\omega \\ a_0 = 2\alpha\omega^2 \end{array}$

1 – Déterminer les dimensions de α et de ω.

2 – Déterminer $\overrightarrow{OB}$ puis $\overrightarrow{OA}$, puis à l'aide de la figure, déterminer la valeur de α.

3 – Sachant que T = 4 s, calculer ω.

4 – Déterminer les coordonnées de C et placer ce point sur la figure.

5 – Vérifier que le point M parcourt un arc de parabole d'équation :

$$y = x - \frac{x^2}{4\alpha}$$

6 – Déterminer les composantes du vecteur vitesse $\vec{v}$, dans la base cartésienne et vérifier que son module a pour expression :

$$v = v_0 \sin\omega t \sqrt{1 + \cos^2\omega t}$$

7 – Déterminer les composantes du vecteur accélération $\vec{a}$, dans la base cartésienne et vérifier que son module a pour expression :

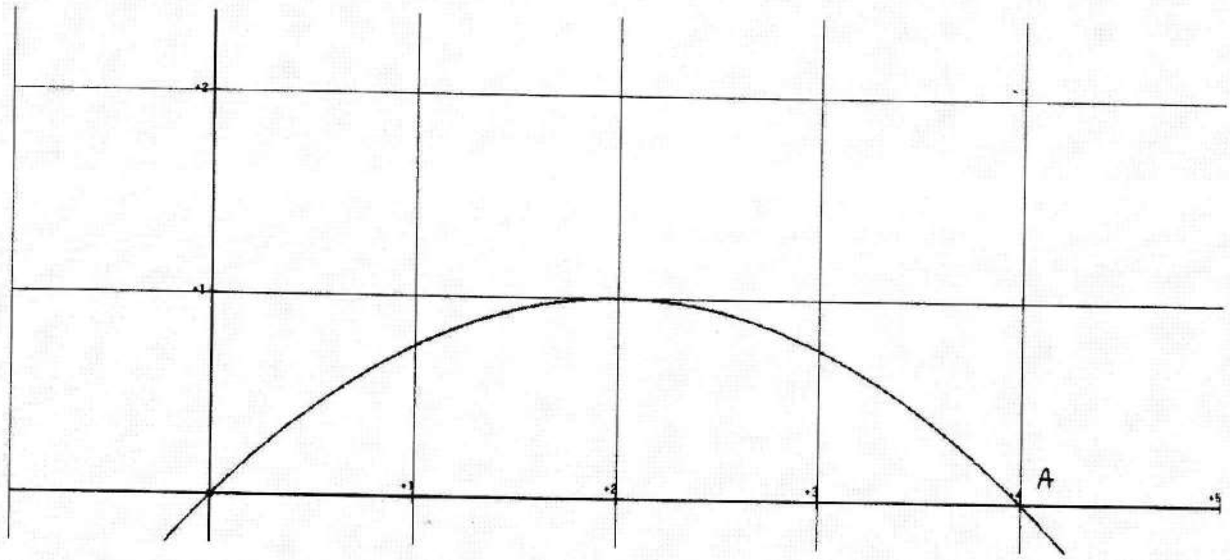
$$a = a_0 \sqrt{4\cos^4\omega t - 3\cos^2\omega t + 1}$$

8 – Vérifier la relation :

$$\overrightarrow{a(t)}.\overrightarrow{v(t)} = 2 a_0 v_0 \sin\omega t \cos^3\omega t$$

9 – Représenter les vecteurs $\overrightarrow{v(t)}$ et $\overrightarrow{a(t)}$ à l'instant $t = t_C$.

Que remarque-t-on ?



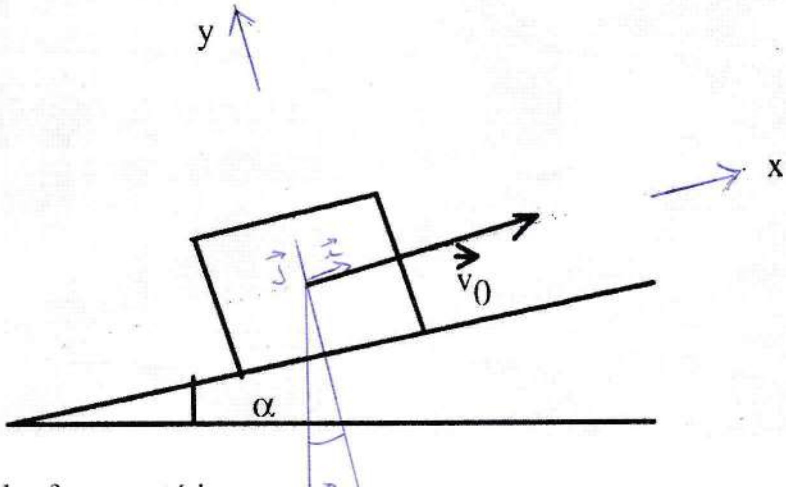
TD 3

Dynamique

Exercice 1

Un solide assimilable à une masse ponctuelle m=2kg glisse sans frottement d'un mouvement de translation rectiligne sur un plan incliné d'un angle α=30° avec l'horizontale. (Poussée d'Archimède négligeable). (On prendra g=10m/s²)

Il est lancé en O avec une vitesse v_0=10m/s, suivant la ligne de plus grande pente du plan.

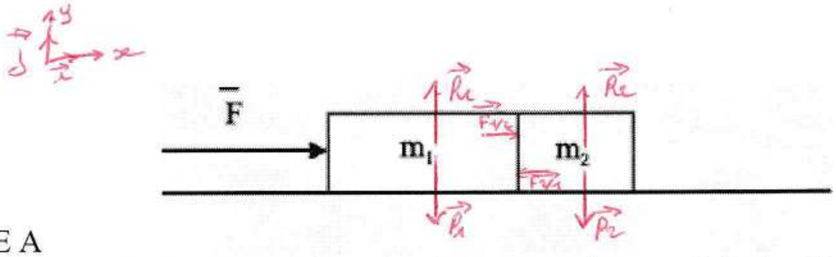


1) Donner le bilan des forces extérieures.
2) Déterminer l'accélération subie par le solide.
3) Déterminer la distance entre le point le plus élevé de la trajectoire et le point de lancement.
4) Déterminer le temps mis par l'objet pour repasser par ce point.

Exercice 2

On donne le schéma ci-dessous : (avec F=10 N, m1=1kg et m2=2kg).

Les deux masses se déplacent linéairement sur une surface polie, donc sans frottement. La résistance de l'air est négligeable. On donne g =10m/s²



PARTIE A

1) Après avoir donné le bilan des forces extérieures. Calculer l'accélération subie par l'ensemble des masses m1 et m2.
2) Calculer l'accélération subie par la masse m2.
3) Calculer la force qu'exerce m1 sur m2 ; que peut-on dire sur la force qu'exerce m2 sur m1 ?
4) La poussée dure pendant t = 10s, quelle est la vitesse atteinte par l'ensemble des masses ?
5) Quelle est la distance parcourue si l'ensemble était au repos au départ ?

PARTIE B

6) Quel est le travail effectué par la force F?
7) Quelle est la valeur de l'énergie cinétique au bout de t=10s?
8) Donner la relation liant l'énergie cinétique et le travail. Que remarquez-vous; quant aux résultats obtenus ?

TD3 Dynamique

Exercice 1 :

1) Bilan des forces extérieures

Poids : $\|\vec{P}\| = mg$ $\quad \vec{P}$

angle $\alpha = 30°$ avec y

Réact° du sol : $\vec{R} \parallel \vec{j}$

$\|\vec{R}\| = R = ?$

2) Accélérat° du solide

★ 2ème loi de Newton

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{c}$$

★ Projection sur x :

$ma = -mg\sin\alpha + 0$ $\quad \vec{a} \parallel \vec{i}$ car mvt rectiligne sur l'axe Ox

D'où $a = -g\sin\alpha$

AN : $a = -10 \times \frac{1}{2}$

$a = -5\,m.s^{-2}$ ACCELERATION

★ Projection sur y : inutile !

$0 = -mg\cos\alpha + R$

D'où $R = mg\cos\alpha$

3) Vitesse et position

$a = Cte$ d'où

On intègre

$v(t) = at + V_0$

On intègre $x(t) = \frac{1}{2}at^2 + V_0 t + x_0$ $\quad$ ($x_0 = 0$ position initiale en O)

$$v_1^2 - v_0^2 = 2a(x_1 - \underbrace{x_0}_{=0})$$

On cherche x_1 tel que $v_1 = 0$

$0^2 - v_0^2 = 2a(x_1 - 0)$

$$x_1 = -\frac{v_0^2}{2a}$$

$$x_1 = -\frac{10^2}{2.(-5)} = 10\,m$$

★ Variante : On cherche t_1

$v(t_1) = 0$

$at_1 + v_0 = 0$

$t_1 = -\frac{v_0}{a}$ $\quad$ AN $t_1 = \frac{10}{5} = 2$

Alors $x_1 = x(t_1) = \frac{1}{2}at_1^2 + V_0 t_1$

AN : $x(t_1) = \frac{1}{2}(-5)2^2 + 10 \times 2$

$x_1 = 10\,m$ (m̂ réponse)

4) Temps de retour en O

On cherche t_2 tel que $x(t_2)=0$

$x(t_2) = \frac{1}{2} a t_2^2 + v_0 t_2 = 0$

$t_2 \left(\frac{a}{2} t_2 + v_0\right) = 0$

$\begin{cases} t_2 = 0 & \text{instant initial} \\ \text{ou } t_2 = -\frac{2 v_0}{a} & \text{retour} \end{cases}$

AN: $t_2 = -\frac{2 \times 10}{-5} = 4\,s$

Rmq: $t_2 = 2t_1$ c'est normal par symétrie

Exercice 2 :

PARTIE A

1) Bilan des forces extérieurs

Poids : $\vec{P_1} = -m_1 g \vec{j}$

$\vec{P_2} = -m_2 g \vec{j}$

React° au sol : $R_1 \parallel \vec{j}$

$\|\vec{R_1}\| = R_1 = ?$

$R_2 \parallel \vec{j}$

$\|\vec{R_2}\| \stackrel{d}{=} R_2 = ?$

Force : $F = 10N \parallel \vec{x}$

Attention, on ne prend pas $\vec{F_{1/2}}$ ni $\vec{F_{2/1}}$, car se ne sont pas des efforts extérieurs au système $(m_1 + m_2)$

Accelerat° de l'ensemble

$m\vec{a} = \vec{P_1} + \vec{P_2} + \vec{R_1} + \vec{R_2} + \vec{F}$

project° sur x : $ma = 0+0+0+0+F$

$a = \frac{F}{m}$ (et $\vec{a} = a\vec{i}$)

m_1 et m_2 ont le m̂ mvt de les 2 solides ont la m̂ accelerat° : $a_1 = a_2 = a$

$a_2 = \frac{F}{m}$

3) Bilan des forces.

2ème loi de Newton $m_1 a_1 = \vec{F} + \vec{F_{2/1}} + P_1 + R_1$

Proj° x : $m_1 a = F + F_{2/1} + 0 + 0$

$F_{2/1} = m_1 a - F$

$F_{2/1} = m_1 \frac{+F}{m_1 + m_2} - F$

$= \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} - 1\right) F = \frac{m_1 - (m_1 + m_2)}{m_1 + m_2} F$

$F_{2/1} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} F$

TB Suite

Exercice 2.

PARTIE A

4) à $t_1 = 10s$ $v_1 = 33,3\ m.s^{-1}$ $\frac{100}{3}\ m.s^{-1}$

5) $x_1 = 166,7\ m$

PARTIE B $L = 166,7\ m$

6) $W_0 = \vec{F} \cdot \vec{x_0 x_1} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} L \\ 0 \end{pmatrix}$
$= 10 \cdot 166,7$
$= 1667\ J.$

7) $E_c = \frac{1}{2} m_{max}\ v^2$ v à $10s$.
$= \frac{1}{2}\ 3 \times (33,3)^2$
$= 1663,5\ J$

8) Th du Travail. $E_{c1} - \underbrace{E_{c0}}_{0 \text{ car vitesse int nulle}} = W_{0\to1}(\vec{F}) + \underbrace{W_{0\to1}(\vec{P})}_{0 \text{ car } \vec{P} \perp \vec{dm}} + \underbrace{W_{0\to1}(\vec{R})}_{0}$

Il reste $E_{c1} = W_{0\to1}(\vec{F})$

Cette relation est vérifiée aux erreurs d'arrondi près

TD 4

Dynamique et énergie

Exercice 1

Une balle de masse m=100g est lâchée sans vitesse initiale d'une hauteur de h=1m (On prendra $g=10m/s^2$). (Les frottements et la poussée d'Archimède sont négligeables).

1). Calculer son énergie mécanique à t=0 (au moment du lâcher) et quelle est sa nature ?
2). Quelle est son énergie cinétique et sa vitesse à l'arrivée au sol ?
3). Quelle est la durée de la descente ?

4) La balle rebondit sur le sol. L'énergie cinétique juste après le rebond est égale à l'énergie cinétique juste avant multipliée par une constante k=0,9 (pertes de 10%).

a). Quelle est la vitesse de la balle juste après un rebond ?
b). Quelle est l'altitude maximale atteinte après un rebond ?
c). Quelle est la durée de la montée ?

Exercice 2

**Une flèche de masse 100g est lancée verticalement (vers le haut) à partir d'un point A situé à 2m au dessus du sol, avec une certaine vitesse. (On prendra $g=10m/s^2$)
En absence de frottement (poussée d'Archimède négligeable) la hauteur maximale atteinte est de : h= 20m.**

1). Quelle est l'énergie cinétique au départ de la flèche ?
2). Quelle est la valeur de sa vitesse ?
3). Quelle est l'énergie potentielle à l'altitude maximale, que remarquez-vous?
Que pouvez-vous en conclure ?
4). En réalité le lancer se fait avec la même vitesse (en norme) qu'à la question 2, mais avec une inclinaison de 30°.
  a). Bilan des forces s'exerçant sur la flèche ?
  b). Quelle est l'énergie cinétique au départ de la flèche ?
  c). L'altitude maximale atteinte sera-t-elle la même? (justifier)
Que pouvez-vous en conclure ?

TD4 Dynamique et Énergie

Exercice 1 :

$m = 100g$ $h = 1m$ $g = 10 m/s^2$

1) E_m à $t=0$

$E_m(A) = 0 \times mgh$ Énergie m est purement potentielle

AN : $E_m(A) = 0{,}1 \times 10 \times 1 = 1J$.

2) Il y a conservat° de Énergie m car le frottement est négligé

$E_m(B) = E_m(A)$

$E_p(B) = 0$

$E_c(B) = ?$

$E_c(B) + 0 = E_m(A)$ dc $E_c(B) = E_m(A) = mgh$

AN : $E_c(B) = 1J$

L'expression de $E_c(B)$ est $E_c(B) = \frac{1}{2} m v_B^2$

$\cancel{m}gh = \frac{1}{2}\cancel{m}v_B^2$

$v_B = \sqrt{2gh}$

AN : $v_B = \sqrt{2 \times 10 \times 1} = \sqrt{20}$

$= 2\sqrt{5}\ m.s^{-1}$

3) Durée de la descente

Le mvt de A à B est rectiligne uniforme accéléré selon z.

$a = -g = Cte$

$v(t) = -gt + v_B$

$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + 0 + z_A$

On cherche t_B tq : $z_B = z(t_B) = 0$

donne $-\frac{1}{2}g t_B^2 + z_A = 0$

$t_B^2 = \frac{2z_A}{g}$

$t_B = \sqrt{\frac{2z_A}{g}}$ seconde

AN : $t_B = \sqrt{\frac{2 \times 1}{10}} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ (0,45)

4) D'après le texte :

a) $E_c(C) = 0{,}9\,E_c(B)$ Dc $\frac{1}{2}mv_C^2 = 0{,}9 E_c(B)$ $v_C^2 = \frac{1{,}8 \times E_c(B)}{m}$

$v_C = \sqrt{\frac{1{,}8\,E_c(B)}{m}}$ AN : $v_C = \sqrt{\frac{1{,}8 \times 1}{0{,}1}} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

b) La hauteur du rebond est h_D

Examinons les energies en C : $E_m(C) = \cancel{E_p(C)} + E_c(C)$ (0 car $z_C = 0$)

et $E_c(C) = 0{,}9\,E_c(B) = 0{,}9\,J$

en D : $E_c(D) = mg z_D$

L'energie méca est conservée :

$0 + mg z_D = E_c(C) + 0$

Dc $z_D = \frac{E_c(C)}{mg}$ AN : $z_D = \frac{0{,}9}{0{,}1 \times 10} = 0{,}9\,m$

c) Durée de remontée

Le mvt $C \to D$ est rectiligne uniformement décéléré dc :

(1) $a = -g$

(2) $v(t) = -gt + v_C$

(3) $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_C t + z_C\ (=0)$

On cherche le tps t_D tq :

$v(t_D) = 0$ càd $v_C = 0$ $t_D = \frac{v_C}{g}$ est la durée de la montée

AN : $t_D = \frac{3\sqrt{2}}{10}$ (0,42 s)