EFREI -L1 ABCD février 2011

ALGEBRE LINEAIRE CE – durée : 1 heure

Corrigé succinct

Questions de cours (8 points)

Exercice n°1 (10 points)

Soit H le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ *formé des vecteurs de coordonnées (x ; y ; z ; t) vérifiant les équations :*

$x - 2y + 3z = 0$ et $x + y + z - t = 0$; trouver une base de H.

On élimine par exemple x= 2y-3z

Donc H= {(2y-3z, y, z,t) telque 3y-2z-t=0} d'où par exemple t=3y-2z

Donc H ={(2y-3z, y, z, 3y-2z)}= {y(2,1,0,3) + z(-3,0,1,-2)}

Les 2 vecteurs qui apparaissent sont générateurs de H ; on vérifie qu'ils sont libres ; ils forment donc une base de H.

Exercice n°2 (9 points)

Déterminer en fonction de n le terme général de la suite (u_n) vérifiant :

$6 u_n = 5 u_{n-1} - u_{n-2}$, $\forall n > 1$ *avec* $u_0 = -1$ *et* $u_1 = -1/6$.

Posons u_n =r^n ; alors 6r^2-5r+1=0 ; deux racines réelles ½ et 1/3 ;

u_n =A(1/2)^n+B(1/3)^n. Par les conditions initiales A=1 et B=-2

donc u_n =(1/2)^n-2(1/3)^n

Exercice n°3 (9 points)

Déterminer en fonction de n le terme général de la suite (v_n) vérifiant :

$v_{n+2} = - v_n + v_{n+1}$, $\forall n \in \mathbf{N}$, *avec* $v_0 = 1$ *et* $v_1 = -1$.

Posons v_n =r^n ; d'où r^2-r+1=0 ; deux racines complexes (1+-irac(2))/2 de module égal à 1 et d'argument =+-Pi/3. Donc v_n = 1^n (Acos(nPi/3) + Bsin (nPi/3)). Par les conditions initiales A=1 et B=- rac(3) ; donc v_n = cos(nPi/3) – rac(3)sin(nPi/3)

Exercice n°4 (9 points)

Déterminer en fonction de n le terme général de la suite (w_n) vérifiant :

$w_{n+2} - w_{n+1} + (1/4)w_n = 0, \forall n \in N, avec\ \ w_0 = 1\ \ et\ \ w_1 = 2.$

Posons w_n = r^n ; d'où r^2-r+1/4=0 ; une racine double r = ½

D'où w_n = (A+nB) . (1/2)^n. Par les conditions initiales A=1 et B = 3 ; d'où

w_n = (1+3n).(1/2)^n