Corrigé du CE d'Algèbre L1 du 29/10/2012

Question de cours

- Une base d'un espace vectoriel est une famille de vecteurs de cet espace qui est à la fois libre et génératrice.
- Une partie de E est un sous-espace vectoriel s.s.si elle contient le vecteur nul et est stable par combinaison linéaire.

La condition « elle contient le vecteur nul » peut être remplacée par « elle est non vide ».

Au lieu de vérifier la stabilité par combinaison linéaire on peut couper le problème en deux (dans ce cas c'est plutôt une perte de temps) et vérifier la stabilité pour la somme d'une part et la stabilité pour la multiplication par un scalaire de l'autre.

Un très grand nombre de copies présentaient la formule « fermée pour la multiplication » que je n'ai pas acceptée car elle est ambigüe puisqu'on ne précise pas qu'il s'agit de la loi externe. D'ailleurs certaines personnes ont poussé la confusion jusqu'au bout en écrivant le produit scalaire de deux vecteurs au lieu de multiplier un vecteur par un scalaire.

Exercice 1

C'est l'exercice 6 du TD1. Il fallait utiliser la forme algébrique, c'est-à-dire Z=X+iY et résoudre 3 équations du type $z^2 = constante$ dans $\mathbb{C}$. D'abord $z^2 = -7 + 24i$ puis $z^2 = 3 + 4i$ et $z^2 = -3 - 4i$.

Exercice 2

C'est l'exercice 2 du TD 2 . Il n'a pas eu de succès donc voici quelques explication supplémentaires .

Pour vérifier que la famille est libre on écrit la nullité d'une combinaison linéaire dont les coefficients sont a priori inconnus. Notons-les α, β, γ; la nullité de cette combinaison linéaire s'écrit :

$\alpha(1,0,0) + \beta(1,1,0) + \gamma(1,1,1) = (0,0,0)$ c'est une égalité entre vecteurs les trois égalités entre les trois coordonnées donnent un système linéaire (avec second membre nul i.e. homogène) d'inconnues α, β, γ dont la résolution est immédiate et donne $\alpha = \beta = \gamma = 0$, on en déduit que la famille est libre.

Pour vérifier qu'elle est génératrice on écrit un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$ comme une combinaison linéaire de ses trois vecteurs ce qui donne l'équation suivante :

$\alpha(1,0,0) + \beta(1,1,0) + \gamma(1,1,1) = (x, y, z)$; les trois égalités entre les trois coordonnées donnent toujours un système linéaire dont les inconnues sont les 3 coefficients de la combinaison linéaire α, β, γ (cette fois-ci le membre de droite n'est pas nul, ça n'est plus un système homogène). La résolution est élémentaire : $\gamma = z$ donc $\alpha = x - y \; et \; \beta = y - z$.

On en déduit que notre famille est génératrice de $\mathbb{R}^3$, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$. Les coordonnées d'un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$ dans cette base sont les coefficients de la combinaison linéaire qui permet d'exprimer ce vecteur quelconque en fonction des vecteurs de la base, attention l'ordre d'écriture des vecteurs de la base compte ! Si on conserve l'ordre de l'énoncé notre base est ($U = (1,0,0)$, $V = (1,1,0)$, $W = (1,1,1)$) les coordonnées du vecteur (x, y, z) dans la base (U, V, W) sont : $(\alpha, \beta, \gamma) = (x - y, y - z, z)$.

Exercice 3

Les deux questions ont été traitées dans l'exercice 1 du TD 2.

Exercice 4

Corrigé en TD le 2/11.