$\frac{15,5}{23}$

GAUTIER
Arthur

1 9 , 5

L1CPI1
2013

Gautier
Arthur
L_1
Groupe A

(1) le 21/02/14

Algèbre linéaire

I)

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ 2

b) $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 2 \\ -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -2 \\ 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ -2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$

$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} L_2 := -L_2 \\ L_4 := -L_4 \end{matrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & -2 & 2 \\ +2 & -2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

$L_2 := L_2 - L_1$
$L_4 := L_4 - L_3$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 := \frac{1}{2} L_1 \\ L_3 := \frac{1}{2} L_3 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftrightarrow L_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L_1 := L_1 - L_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + x_2 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$$

$$S = \left\{ \left(1 + x_2, x_2, x_4, x_4\right), x_2, x_4 \in \mathbb{R}^2 \right\}$$ 2

c) B est la matrice non-augmentée du système précédent.
Or, une matrice B est inversible si et seulement si $BX = b$ admet une unique solution $X = B^{-1} b$. Ici, le système a une infinité de solutions. Donc B n'est pas inversible

2

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $L_4 := -L_4$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

2

Les opérations élémentaires ne changent pas le déterminant d'une matrice. De plus, si dans une matrice, deux lignes sont égales, le déterminant de cette matrice est nul.

Or, une matrice est inversible si **et seulement si** son déterminant est non-nul. Donc, A n'est pas inversible.

II)

a) $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} L_2 := L_2 - L_1 \\ L_3 := L_3 - L_1 \\ L_4 := L_4 - L_1 \end{matrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2

$\begin{matrix} L_2 := \frac{1}{2} L_2 \\ L_3 := \frac{1}{2} L_3 \\ L_4 := \frac{1}{2} L_4 \end{matrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $L_4 \leftrightarrow L_2$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{matrix} L_1 := L_1 + L_2 \\ L_3 := L_3 - L_2 \\ L_4 := L_4 - L_2 \end{matrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $L_4 := -L_4$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$L_3 \leftrightarrow L_4$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $L_1 := L_1 - L_3$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{matrix} L_1 := L_1 - 2L_4 \\ L_3 := L_3 + L_4 \end{matrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Or, si une matrice est équivalente par lignes à la matrice I_n, alors, elle est inversible. Donc, C est inversible.

b) Comme C est inversible, l'équation $CX = b$ admet une unique solution $X = 0$. Donc, $S = \{(0,0,0,0)\}$

c) ~~Comme C est inversible, C est un produit de matrices élémentaires.~~

d) Comme C est inversible, l'équation $CX = b$ admet une unique solution $X = C^{-1} b$. Donc, le système :

$$\begin{cases} \cdot\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ \cdot\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ \cdot\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ \cdot\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

admet une seule solution, $S = \{(1,0,0,0)\}$.

Gautier
Arthur
L_1
Groupe A

(2)

le 21/02/14

Algèbre Linéaire

III

a) $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ $L_2 := L_2 + L_1$ $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ 1,5

~~pas toutes~~

~~Les opérations élémentaires n'ont pas d'effet sur le déterminant d'une~~ matrice. Cependant, si une matrice a une ligne ou une colonne nulle, son déterminant est nul.

Donc, $|B| = 0$.

b) On a vu que C est équivalente par lignes à la matrice I_m et on sait que les opérations élémentaires ne changent pas le déterminant.

Donc, $|C| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. Or, pour une matrice diagonale, le déterminant est égale au produit des termes de la diagonale. ~~Donc, $|C| = 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$.~~