COMBETTE
Elise

PIL
2013

26,

Lundi 31 mars

Algèbre linéaire

Exercice 1

On veut calculer $\sum_{k=0}^{12} \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right) = \cos 0 + \cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{2\pi}{3} + \cos \pi + \cos\frac{4\pi}{3} + \cos\frac{5\pi}{3} + \cos 2\pi$

$+ \cos\frac{7\pi}{3} + \cos\frac{8\pi}{3} + \cos 3\pi + \cos\frac{10\pi}{3} + \cos\frac{11\pi}{3} + \cos 4\pi$

$= \cancel{1} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{1} - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} + 1 + \cos\frac{7\pi - 6\pi}{3} + \cos\frac{8\pi - 6\pi}{3} + \cos\pi$

$+ \cos\frac{10\pi - 6\pi}{3} + \cos\frac{11\pi - 6\pi}{3} + \cos 0$

$= \cancel{1} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{1} - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} + 1 = \underline{\underline{1}}$ (5)

Exercice 2

On cherche ~~les~~ racines quatrièmes z de $z^4 = 8(1-i\sqrt{3}) = 16\left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = 16e^{-\frac{i\pi}{3}}$, avec $z = re^{i\theta}$.

$$\begin{cases} r^4 = 16 \\ 4\theta \equiv -\frac{\pi}{3} (2\pi) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} r = 2 \\ \theta \equiv -\frac{\pi}{12} \left[\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$ (5)

Donc les racines quatrièmes de $8(1-i\sqrt{3})$ sont $\left\{2e^{-\frac{i\pi}{12}} ; 2e^{\frac{i5\pi}{12}} ; 2e^{\frac{i11\pi}{12}} ; 2e^{\frac{i17\pi}{12}}\right\}$

Exercice 3

On veut montrer que le système $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_2 = 1 \end{cases}$ n'a pas de solution. La matrice augmentée du système est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1}]{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & 7 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 + L_2]{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow \frac{1}{4} L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - 7L_3]{L_1 \leftarrow L_1 + 3L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(2)

On a donc le système $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -\frac{7}{4} \\ 0 = -2 \end{cases}$ qui n'admet aucune solution puisque $0 \neq -2$.

?

?

Exercice 4

?

$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, donc $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

A n'est pas inversible car son déterminant est nul : sa 1ère et sa 3e ligne sont égales (de même, sa 2e ligne et sa 4e ligne sont égales).

(5)

Exercice 5

On veut résoudre le système d'équations linéaires $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

La matrice augmentée du système est :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1}]{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2]{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(5)

On a donc le système $\begin{cases} x_1 - \frac{1}{2} x_3 = \frac{1}{2} \\ x_2 + \frac{1}{2} x_3 - x_4 = \frac{1}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} x_3 + \frac{1}{2} \\ x_2 = -\frac{1}{2} x_3 + x_4 + \frac{1}{2} \end{cases}$

$S = \left\{ \left(\frac{1}{2} x_3 + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} x_3 + x_4 + \frac{1}{2}, x_3, x_4 \right), (x_3, x_4) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.