Léo
Lellouche
Groupe A

Devoir Algèbre linéaire :

Matrice A : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Question 1 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} l_1 - l_4 \\ l_2 - l_3 \\ l_3 - l_2 \\ l_4 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} l_4 \\ l_2 + l_3 \\ l_3 + l_2 \\ l_1 \end{matrix} \sim \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} l_1 \\ l_4 \\ l_2 \\ l_3 \end{matrix}}$$

Question 2 :

Sur Maxima, on tape :

```
(%i1) a:matrix([1,1,1,1],[1,0,1,1],[1,1,0,1],[1,1,1,0]);
                                   [ 1  1  1  1 ]
                                   [            ]
                                   [ 1  0  1  1 ]
(%o1)                              [            ]
                                   [ 1  1  0  1 ]
                                   [            ]
                                   [ 1  1  1  0 ]
(%i2) invert(a);
                              [ - 2   1    1    1 ]
                              [                   ]
                              [  1  - 1    0    0 ]
(%o2)                         [                   ]
                              [  1    0  - 1    0 ]
                              [                   ]
                              [  1    0    0  - 1 ]
```

On obtient alors :

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

Question 3 :

On sait que :

$AX = b \Leftrightarrow X = A^{-1}b$

Donc : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-2\times4)+(6\times1)+(7\times1)+(0\times1) \\ (1\times4)+(-1\times6)+(0\times7)+(0\times0) \\ (1\times4)+(0\times6)+(-1\times7)+(0\times0) \\ (1\times4)+(0\times6)+(0\times7)+(-1\times0) \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Le système $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=4 \\ x_1+x_3+x_4=6 \\ x_1+x_2+x_4=7 \\ x_1+x_2+x_3=0 \end{cases}$ a alors une solution unique : $\boxed{\begin{cases} x_1=5 \\ x_2=-2 \\ x_3=-3 \\ x_4=4 \end{cases}}$

On vérifie que le résultat trouvé est juste :

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=4 & VRAI \\ x_1+x_3+x_4=6 & VRAI \\ x_1+x_2+x_4=7 & VRAI \\ x_1+x_2+x_3=0 & VRAI \end{cases}$$

Question 4 :

On sait que :

$AX=b \Leftrightarrow X=A^{-1}b$

Donc : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le système $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_1+x_3+x_4=0 \\ x_1+x_2+x_4=0 \\ x_1+x_2+x_3=0 \end{cases}$ a alors une solution unique : $\boxed{\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=0 \\ x_3=0 \\ x_4=0 \end{cases}}$

Ici, pas besoin de vérifier que le résultat trouvé est juste, cela se voit tout de suite.

Question 5 :

Sur Maxima, on tape :

```
(%i3) a.a;
                                   [ 4  3  3  3 ]
                                   [            ]
                                   [ 3  3  2  2 ]
(%o3)                              [            ]
                                   [ 3  2  3  2 ]
                                   [            ]
                                   [ 3  2  2  3 ]
```

On obtient alors :

$$\boxed{A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}}$$

La matrice A^2 est inversible car la multiplication de 2 matrices inversibles est inversible. Or A est inversible. Etant donné que l'inverse de A^2 est $\left(A^{-1}\right)^2$, les solutions de $A^2X=(0)$ seront $X=\left(A^{-1}\right)^2(0)$, c'est à dire $\boxed{X=(0)}$.

Question 6 :

Sur Maxima, on tape :

```
(%i2) b:matrix;
(%o2)                              matrix
(%i3) b:a.a+a;
                                 [ 5  4  4  4 ]
                                 [            ]
                                 [ 4  3  3  3 ]
(%o3)                            [            ]
                                 [ 4  3  3  3 ]
                                 [            ]
                                 [ 4  3  3  3 ]
(%i4) determinant(b);
(%o4)                                0
```

$$B = A^2 + A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Cette matrice n'est pas inversible.}}$

L'équation $BX = (0)$ n'aura pas de solution unique. L'équation aura donc soit une seule solution, soit une infinité.

Or, on peut tout de suite voir qu'il existe une solution $X = (0)$.

On peut en déduire que le système $BX = (0)$ a une infinité de solutions.

Question 7 :

Sur Maxima, on tape :

```
(%i2) c:matrix;
(%o2)                 matrix
(%i3) c:a.a-a;
                   [ 3  2  2  2 ]
                   [            ]
                   [ 2  3  1  1 ]
                   [            ]
(%o3)              [ 2  1  3  1 ]
                   [            ]
                   [ 2  1  1  3 ]
(%i4) invert(c);
                 [  5     2     2     2  ]
                 [  -   - -   - -   - -  ]
                 [  3     3     3     3  ]
                 [                       ]
                 [    2   2     1     1  ]
                 [ -  -   -     -     -  ]
                 [    3   3     6     6  ]
                 [                       ]
(%o4)            [    2   1     2     1  ]
                 [ -  -   -     -     -  ]
                 [    3   6     3     6  ]
                 [                       ]
                 [    2   1     1     2  ]
                 [ -  -   -     -     -  ]
                 [    3   6     6     3  ]
```

$$\boxed{C = A^2 - A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}}$$

Ici, on voit immédiatement qu'une solution particulière du système $CX = (0)$ est : $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$

Or, grâce au théorème du carré, on sait que si C est inversible alors le système $CX = b$ possède une unique solution.

Il y a donc une unique solution au système $CX = b$: $\boxed{\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}}$