Exercice 2

$t_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $t_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Est-ce que $\forall y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2 + \lambda_3 t_3 + \lambda_4 t_4 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \forall \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, le système $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 0 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_3 \\ \lambda_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ a des solutions

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a \\ \lambda_1 + \lambda_3 = b \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4 = c \end{cases}$$ a des solutions

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 & 0 & b \\ 1 & 1 & 0 & -1 & c \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & -1 & 0 & 0 & b-a \\ 0 & 0 & -1 & -1 & c-a \end{pmatrix}$$

$\to \big(1 \; 1 \; 1 \; 0 \ldots$

Exercice 2

$t_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $t_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Est-ce que $\forall y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ $\exists$ $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2 + \lambda_3 t_3 + \lambda_4 t_4 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$\iff \forall \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, le système $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 0 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_3 \\ \lambda_3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

a des solutions

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a \\ \lambda_1 + \lambda_3 = b \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4 = c \end{cases}$$ a des solutions

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 & 0 & b \\ 1 & 1 & 0 & -1 & c \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & -1 & 0 & 0 & b-a \\ 0 & 0 & -1 & -1 & c-a \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & a-b \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a-c \end{pmatrix}$$ $\to$ Il suffit de réduire pour avoir les solutions.

Donc ces 4 vecteurs engendre $\mathbb{R}^3$

Exercice 3

$z_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, z_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, z_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, z_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 & -2 & b \\ 1 & 1 & 2 & 0 & c \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & -1 & -1 & -2 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c-a \end{pmatrix}$$

$c-a \neq 0$, Système inconsistant donc z_1, z_2, z_3, z_4 n'est pas une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^3 = Vect(t_1, t_2, t_3, t_4)$ a, b, c $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = a\,\mathcal{E}_1 + b\,\mathcal{E}_2 + c\,\mathcal{E}_3 + d\,\mathcal{E}_4$

$\mathbb{R}^3 = Vect(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3)$

Théorème 8

$\begin{cases} V'_1 = a_{11} V_1 + \dots + a_{1t} V_t \\ V'_2 = a_{21} V_1 + \dots + a_{2t} V_t \\ \dots \end{cases}$ $\Rightarrow \mu_1 V'_1 + \dots + \mu_t V'_t = Comb$

Soit E un espace vectoriel $(v_1, \dots, v_p)$ est une famille linéairement indépendante lorsque l'unique solution de l'équation

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p = 0 \text{ est } \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0,\ \dots,\ \lambda_p = 0.$$

Exercice 1.

$\mathbb{R}^3$ $\quad v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{array} \iff \begin{cases} \lambda_2 = -\lambda_1 \\ \lambda_3 = -\lambda_1 \end{cases}$$

Ces 3 vecteurs forment une famille liée

Exemple 5

$v_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, v_2\begin{pmatrix}1\\-10\\1\end{pmatrix}, v_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

$$\begin{cases}\lambda_1 + \lambda_2 = 0\\ \lambda_1 - 10\lambda_2 + \lambda_3 = 0\\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -10 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -11 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -\frac{1}{11} & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow$$ Cette famille est libre

Remarque

1) E espace vectoriel : $(0_E, v_1, \dots, v_p)$: cette famille est liée

$13/15 . 0_E + 0.v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_p = 0_E$

Dimension espace vectoriel de dimension n et S ...
on n il y a équivalence entre :

- S est une base de V
- S engendre V
- S est libre

Exercice 6

Dimension de $\mathbb{R}^n \Rightarrow n$

Exercice 7

$\mathbb{R}_n[X] \Rightarrow$ dimension $n+1$

$(P(x) = a_1 1 + a_2 X + a_3 X^2 + \dots + a_{n+1} X^n$

Exercice 8

$\mathbb{R}_3[X] \Rightarrow$ dimension 4

$P_0 = (X-1)(X-2)(X-3)$

Exercice 6

Dimension de $\mathbb{R}^n \Rightarrow n$

Exercice 7

$\mathbb{R}_n[X] \Rightarrow$ dimension $n+1$

$(P(x) = a_1 1 + a_2 X + a_3 X^2 + \dots + a_{n+1} X^n$

Exercice 8

$\mathbb{R}_3[X] \Rightarrow$ dimension 4

$$\left.\begin{array}{l} P_0 = (X-1)(X-2)(X-3) \\ P_1 = \cancel{X} X(X-2)(X-3) \\ P_2 = X(X-1)(X-3) \\ P_3 = X(X-1)(X-2) \end{array}\right\}$$

Le numéro indique la racine qui manque

$$\lambda_0 (X-1)(X-2)(X-3) + \lambda_1 X(X-2)(X-3) + \lambda_2 (X)(X-1)(X-3)$$

$$\lambda_3 X(X-1)(X-2) = 0$$

$\to X = 0$

$\lambda_0 (-6) = 0 \Rightarrow \lambda_0 = 0.$

$\to X = 1$

$6 \lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$

$\to X = 2$

$-6\lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$

$\to X = 3$

$6 \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_3 = 0$

P_0, P_1, P_2, P_3 forment une base $(\mathbb{R}_3[X])$

Théorème 23

Espace vectoriel de dimension n Base $(e_1, e_2$

Exercice 9

$\mathbb{R}^4$ $\quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Famille libre car v_1 et v_2 ne sont pas multiples

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

famille libre car n'est pas comb. linéaire des 2 autres

famille libre car n'est pas comb. linéaire des 3 autres

Base

Première 2h

[illegible]

Définition 26

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ [illegible]

[illegible]

$A(X)$

Exercice 27

1) $f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \to AX = (C_1 \; C_2 \; \dots \; C_p)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = x_1C_1 + \dots + x_pC_p$

2) $\ker(A) = \{0\} \Leftrightarrow f$ est injective

3) $AX = B$ a une solution si et seulement si B est combinaison linéaire des colonnes de A

Exercice 12

a) f n'est pas surjective car $\mathrm{Im}(f) \neq \mathbb{R}^4$

b) f n'est pas injective car E_1 et E_2 ont la même image

c) $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ [illegible] $A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \rightarrow$ image de ε_1 [illegible]

$A\begin{pmatrix}[illegible]\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix}[illegible]\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}[illegible]\end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix}[illegible]\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}[illegible]\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\mathrm{Ker}(A) = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \text{ tq } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \right\}$

$\mathrm{Ker}(A) = \left\{ (2x_2 - x_3, x_2, x_3, 0), (x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

$= \mathrm{Vect}(2\varepsilon_1 + \varepsilon_2, -\varepsilon_1 + \varepsilon_3)$

$= \{ x_2(2,1,0,0) + x_3(-1,0,1,0), (x_2, x_3) \in \mathbb{R}$

$A\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} \to$ image de ε_1 et de ...

$A\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

$= A\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$

$\operatorname{Ker}(A) = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \text{ tq } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_2 - x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases}$

$\operatorname{Ker}(A) = \left\{ (2x_2 - x_3, x_2, x_3, 0),\ (x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

$= \operatorname{Vect}(2\varepsilon_1 + \varepsilon_2, -\varepsilon_1 + \varepsilon_3)$

$= \left\{ x_2(2, 1, 0, 0) + x_3(-1, 0, 1, 0),\ (x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

$\left\{ X,\ AX = \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} \right\} = \left\{ \varepsilon_1 + \varepsilon_4 + \alpha(2\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \beta(-\varepsilon_1 + \varepsilon_3) \right.$