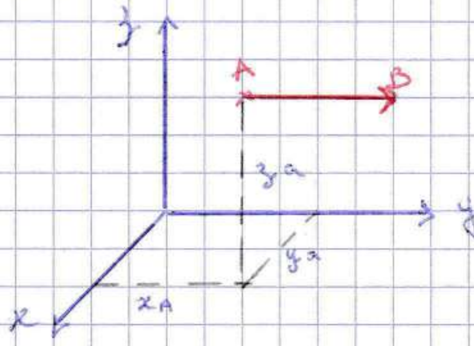
Algèbre Linéaire

1 - Vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et combinaisons linéaires



$\vec{AB} = \begin{cases} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{cases}$ Les 3 combinaisons définissent un vecteur

ex: $A = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -_B - {}_A \\ -_B - {}_A \\ -_B - {}_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-1 \\ 2-2 \\ 0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

On définit 2 opérations sur le vecteur :

loi interne + : $v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix}3\\5\\-1\end{pmatrix}$ $v_1 + v_2 = \begin{pmatrix}1+3\\2+5\\0-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\7\\-1\end{pmatrix}$

loi externe $\cdot$: La multiplication d'un vecteur par un réel

Ex: $\lambda v_1 = \lambda \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda\\2\lambda\\0\end{pmatrix}$; $\frac{1}{2} v_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

En utilisant ces 2 opérations on peut former des combinaisons linéaires

Ex $v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$

$\alpha \vec{v_1} + \beta v_2 = \alpha \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\2\alpha\\3\alpha\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-\beta\\2\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\2\alpha-\beta\\3\alpha+2\beta\end{pmatrix}$

⚠ à la notation !

On pourra (selon les besoins) passer de la notation colonne à la notation ligne

Ex: On pourra noter

$\alpha \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha + 2\beta + 3\gamma \\ 0 \\ -\alpha + \beta + \gamma\end{pmatrix}$

$\alpha(1,0,-1) + \beta(2,0,1) + \gamma(3,0,1) = (\alpha + 2\beta + 3\gamma, 0, -\alpha + \beta + \gamma)$

ACT Calculer les coordonnées de ~~la~~ la combinaison linéaire suivante avec la notation colonne puis ligne.

$\alpha u + \beta v + \gamma w$ où $u = (-1, 3/2, 5)$ $v = (0, -1, -2)$ $w = (3, 3/2, -1)$

$\alpha = \begin{pmatrix}-1\\3/2\\5\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}0\\-1\\-2\end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix}3/2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\alpha + 3 \\ \frac{3\alpha}{2} - \beta + \frac{3\gamma}{2} \\ 5\alpha - 2\beta + \gamma\end{pmatrix}$

Si on passe l'opération avec la notation en ligne on obtient le même vecteur mais noté $(-\alpha+3\gamma, 3\alpha/2-\beta+3\gamma/2, 3\alpha-2\beta-\gamma)$

Ensemble de toutes les combinaisons linéaires d'un nbr fini de vecteurs.

Ex: $v_1=(1,2)$ $v_2=(-1,-4)$ Ttes les combinaisons linéaires possibles (de l'univers tt entiers) sont les vecteurs $\lambda(1,2)+\mu(-1,-4)$ avec λ et μ qui prennent ttes les valeurs possibles ds $\mathbb{R}$. L'ensemble de ttes les combinaisons linéaires faisables avec v_1 et v_2 sera noté selon les besoins.

M1 $E=\{\lambda v_1+\mu v_2, (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\}$

M2 $E=\{\lambda(1,2)+\mu(-1,-4), (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\}$

M3 $E=\{(\lambda-\mu, 2\lambda-4\mu), (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\}$

Exo Noter l'ensemble de ttes les combinaisons linéaires possibles pr les ensembles de vecteurs suivants:

i) $v_1=(1,0)$ $v_2=(2,-1)$

ii) $v_1=(1,0,-1)$ $v_2=(5,1,-2)$ $v_3=(0,0,1)$

iii) $v_1=(0,1,0,0)$ $v_2=(-1,0,0,0)$ $v_3=(0,1,0,-1)$

iiii) $w=(1,3,2,0,-2)$

M3 $E_{i)}=\{(\lambda+2\mu, -\mu), (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\}$

M3 $E_{ii)}=\{(\lambda+5\mu, \mu, -\lambda-2\mu+\kappa), (\lambda,\mu,\kappa)\in\mathbb{R}^3\}$

M2 $E_{iii)}=\{x(0,1,0,0)+y(-1,0,0,0)+z(0,1,0,-1), (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\}$

$E_{w)}=\{\lambda(1,3,2,0,-2), \lambda\in\mathbb{R}^3\}$

2 - Matrices augmentées et systèmes homogènes.

On va utiliser des combinaisons linéaires pour former des systèmes linéaires à 3 ou 4 variables (= inconnues)

ex: $v_1 = (1,0,1)$ $v_2 = (2,-1,2)$ $v_3 = (3,1,0)$

Le fait de poser que la c.l. $xv_1 + yv_2 + zv_3$ est nulle définit un système linéaire homogène.

$xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0$ (signifie 0 de $\mathbb{R}^3$ càd $(0,0,0)$)

Écrivons l'addition en colonne

$x\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ cette égalité définit un système linéaire de variable x, y, z.

$\left(\cancel{\begin{cases} 2x+3y=1 \\ -x+7y=0\end{cases}}\right)$ on oublie pr cette année.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ -y + z = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

Pour résoudre on utilisera une notation SANS x, y, z
On forme la matrice augmentée.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

exo ★ $v_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix}-1\\5\\3/2\end{pmatrix}$

a) Écrire entre accolades le système défini par $xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0$
b) Écrire la matrice augmentée du système.

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ -x + 5z = 0 \\ x - 2y + \frac{3}{2}z = 0 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & 3/2 & 0 \end{array}\right)$$

★ $v_1 = (0,1,1,-1/2)$ $v_2 = (0,1,1,-3)$ $v_3 = (1,-1,0,-1)$ $v_4 = (1,0,0,0)$
et la cl $xv_1 + yv_2 + zv_3 + tv_4 = 0$

$$\begin{cases} z + t = 0 \\ x + y - z = 0 \\ x + y = 0 \\ -\frac{1}{2}x - 3y - z = 0 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & -3 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

3. Principe de la réduction gaussienne et application aux 3x3 homogènes

Ds une réduction gaussienne on fait 3 types d'opérations.

- Multiplier une ligne par une constante $\neq 0$
- Échanger 2 lignes
- Ajouter à une ligne une autre ligne multipliée par une constante $\neq 0$

ex On veut résoudre le système homogène $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+y+2z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad l_2 = l_2 - 2l_3$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} l_2 = l_2 \times (-1) \text{ pour avoir } 1 \\ l_3 = l_3 - l_1 \end{array}$$

tjrs $= 1$ Échelonner

Maintenant on va réduire càd transformer la matrice pour obtenir la propriété suivante : lorsqu'une colonne contient le premier coef non nul d'une ligne, ts ses autres coef sont nuls.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad l_1 = l_1 - l_2$$

Échelonnée réduite

Dernière étape : Écriture de l'ensemble solution du système homogène

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Si la colonne contient un coef qui est le premier non nul de sa ligne on dit que la variable est directrice.

Ici x est directrice, y aussi mais pas z on dit que z est libre.

On réécrit le système avec les variables et on exprime les variables directrices en fonction des variables libre.

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases}$$

Un triplet solution est de la forme $(x, y, z) = (-z, 0, z)$

L'ensemble solution s'écrit $\mathcal{E} = \{(-z, 0, z), z \in \mathbb{R}\}$ qui s'écrit aussi comme ~~sur~~ vu en exo $\mathcal{E} = \{z(-1, 0, 1), z \in \mathbb{R}\}$

Exo a) Mettre $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ sous forme échelonnée réduite.

b) Écrire l'ensemble des solutions comme dans l'ex précédent

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} l_2 = l_2/2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} l_3 = l_3 - 3l_1$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} l_3 = l_3 + 2l_2$

échelonnée

$\sim \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} l_1 = l_1 - l_2$

échelonnée réduite

$\begin{cases} x - z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ un triplet (x, y, z) est de la forme $(z, 0, z)$

$E = \{(z, 0, z), z \in \mathbb{R}\} = \{z(1, 0, 1), z \in \mathbb{R}\}$

Idem pr $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} -2l_1$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} l_2 - l_1$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} l_2/3$

$\begin{cases} x + 2z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x = -2z \\ y = z \end{cases}$

3x3 homogène

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

↑ matrice des coef

$(x, y, z) = (-2z, z, z)$

$E = \{z(-2, 1, 1), z \in \mathbb{R}\}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

↑ matrice augmentée ds un système homogène la colonne ne sert pas dans le calcul.

Exo

$$\begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ -2x + 2y + z = 0 \\ \quad -y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 8 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} l_2 + 2l_1$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 19 \end{pmatrix} 8l_3 + l_2$$

Correction

Rmq : on arrive a une matrice qui a des coefs tous non nuls sur la diagonale et tous nuls sous la diagonale.

On peut dire que la solution est unique

Reduire $\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} l_3/19$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} l_1 - l_3 \\ l_2 - 3l_3 \\ \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} l_2/8$$

$$\sim \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 0 \\ 0 & \underline{1} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{1} \end{pmatrix} l_1 - l_3$$

3 1 directeurs
3 variables directrices

Retour au système homogène

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \mathcal{E} = \{(0,0,0)\}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} l_2 - l_3$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} l_2 - l_1$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} l_2/3l_1$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} l_2 + l_1$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} l_2/l_1$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} l_3 + l_2$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} l_3/3$$

Non finie

Resoudre le système homogène dont la matrice des coef est

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -2 & -11 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} l_1 - 3l_3 \\ l_2 - 2l_3 \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -11 \end{pmatrix} \; l_3 \leftrightarrow l_1$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -14 \end{pmatrix}$$

La matrice a une diagonale de coefs tous non nuls, on peut calculer tt de suite que la matrice E. R. est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et solution $E = \{(0, 0, 0)\}$

Resoudre le système homogène dont la matrice des coef est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \; l_3/2$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \; l_2 \leftrightarrow l_3$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \; l_3 - l_1$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \; l_3 + l_2$$

Echelonnée
On réduit.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} l_1 - l_2 \quad \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} l_2 + l_3$$

Echelonné réduite.

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -t \\ z = -t \end{cases} \qquad (x, y, z, t) = (0, -t, -t, t)$$

$$= t(0, -1, -1, 1)$$

$$E = \{t(0, -1, -1, 1), t \in \mathbb{R}\}$$

Jusqu'à maintenant ns avons résolu des systèmes homogènes pour lesquels il n'y a que 2 cas :

★ une infinité de solutions
★ $E = \{ (0, 0, \dots, 0) \}$ (le nbr 0 est égale au nbr d'inconnues)

Dans les système avec second membre non nul, new cas.

ex : $\begin{cases} 3x + 2y + z = -1 \\ 7x + 6y + 5z = 3 \\ 5x + 4y + 3z = 2 \end{cases}$ $\sim$ équivalent par ligne

Matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 7 & 6 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{array}\right) l_2 - l_3$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{array}\right) l_1 - l_2$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{array}\right) l_2 - 2l_1$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 8 & 12 \end{array}\right) l_3 - 5l_1$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) l_3 - 2l_2$$

Pr un sys non homo dès qu'on arrive à une ligne $(0 \text{—} 0\ \alpha)$ on conclut $E = \emptyset$

ici on a $0x + 0y + 0z = 2$ et c'est fausse

On dit le système est inconsistant, sans solution exo Résoudre $\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x - 2y + z = 1 \\ -2x + y + z = 1 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} l_2 - l_1$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} l_3 + 2l_1$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} l_3 + l_2$$

$\mathcal{E} = \emptyset$ Le système est inconsistant.

exo Heureusement, il existe des systèmes avec 2nd mbre non nul et des solutions, mais combien ? 1 ou ∞ ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & 4 & -3 \\ -3 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} l_2 - l_1$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & 4 & -3 \\ 0 & 4 & -8 & 5 \end{pmatrix} l_3 + 3l_1$$

Matrice des coefs sup ss 0 sur diagonale $\sim \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & -4 \end{matrix}} & \begin{matrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{matrix} \end{pmatrix} l_3 + l_2$

Conclusion solution unique

Réduire $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -1/4\, l_2 \\ -1/4\, l_3 \end{matrix}$ pour obtenir la valeur de LA solution.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 5/4 \\ 0 & 1 & -1 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{pmatrix} l_1 - l_2$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 5/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{pmatrix} l_2 + l_3$$

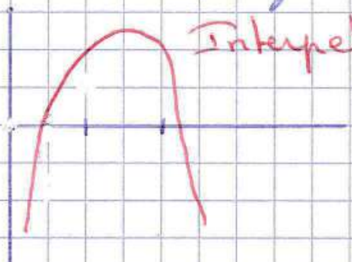
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{pmatrix} l_1 + 2l_3$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{2} \right) \right\}$$

Exo Polynôme et système linéaire (facile)

Déterminer le (les) polynômes P de degré ≤ 2 tel que :

$$\begin{cases} P(0) = 0 \\ P(1) = 1 \\ P(2) = -4 \end{cases}$$



on remplace x ds

$P = a + bx + cx^2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a + b + c = 1 \\ a + 2b + 4c = -4 \end{cases}$$

Devient la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ l_2 - l_1 \\ l_3 - l_1 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \frac{1}{2} l_3 \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ l_3 - l_2 \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ l_2 - l_3 \\ \\ \end{array}$$

On peut dire qu'il existe un unique P

$(a, b, c) = (0, 4, -3)$ $\quad P = 4x - 3x^2$

Exo

$$\begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ 2x + y - z + t = 0 \\ x + y - z + t = 0 \\ \quad + 2y - 2z - t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ l_2 - 2l_3 \\ l_3 - l_1 \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ l_4 - l_3 \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ l_3 + 2l_2 \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} l_1 - l_2 \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

ROUSSE

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} l_1 - l_3 \\ \\ l_3 - 2l_4 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \; l_2 - 2l_4$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} l_2 \times -1 \\ l_3 \leftrightarrow l_4 \quad l_3 \times -1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & t & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

x, y, t directrice
z var libre

$$\begin{cases} x = 0 \\ y - z = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z \\ t = 0 \end{cases}$$

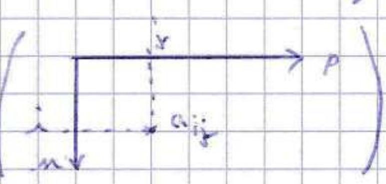
$$(x, y, z, t) = (0, z, z, 0)$$

$$S = \{(0; z; z; 0), z \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{z(0, 1, 1, 0), z \in \mathbb{R}\}$$

Notations matricielles : premier contact

Nous allons travailler dans l'ensemble des matrices à n lignes, p colonnes à coef réels noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

On note classiquement $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$



Sur les matrices on va définir 2 opérations comme sur les vecteurs

Loi interne + : si 2 matrices sont de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

Si $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ et $B (b_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$

alors $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$

Loi externe : multiplication par un réel

$\lambda \in \mathbb{R}, \lambda A = (\lambda a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$

Exo

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ calculer $\alpha A + \beta B$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$

$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ 2\alpha & -3\alpha \\ 3\alpha & 2\alpha \end{pmatrix}$ $\beta B = \begin{pmatrix} \beta & \beta \\ -\beta & 2\beta \\ 2\beta & -\beta \end{pmatrix}$

$$\alpha A + \beta B = \begin{pmatrix} \alpha + \beta & -\alpha + \beta \\ 2\alpha - \beta & -3\alpha + 2\beta \\ 3\alpha + 2\beta & 2\alpha - \beta \end{pmatrix}$$

Exo

$C = (2 \quad -1 \quad 3)$ $D = (3 \quad 1 \quad 2)$ $\alpha C + \beta D$

$\alpha C + \beta D = (2\alpha + 3\beta \quad -2\alpha + \beta \quad 3\alpha + 2\beta)$

Exo $A = a_{ij} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ Écrire $\tilde{A} = a_{ji}$

$a_{ji} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ Transposition. ligne $\Rightarrow$ colonne
colonne $\Rightarrow$ ligne.

Exo Grâce au ~~m~~ principe calculer la matrice ~ pour les matrices. Calculez les transposés des matrices suivantes.

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $C = (2 \quad -1 \quad 2)$ $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ $\tilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\tilde{C} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\tilde{D} = (1 \; 2 \; 3)$

Exo Récap Système linéaire

$$\begin{cases} x \quad\quad -z + t = 2 \\ 2x \quad y - 2z \quad = 4 \\ -x \quad 2y + z - t = 2 \end{cases}$$

1) Vérifier que $(0,2,-1,1)$ est solution

2) Résoudre le système homogène associé en écrivant les combinaisons linéaire et en gardant une colonne vide à droite

1) $$\begin{cases} 0 \quad\quad 0 \quad -(-1) = 2 \\ 2\times 0 + 2 - 2(-1) = 4 \\ -0 + 2\times 2 - 1 = 2 \end{cases}$$

$(0,2,-1,1)$ est bien solution

2) $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & -2 & \cdot \\ -1 & 2 & 1 & -1 & \cdot \end{pmatrix} l_2 - 2l_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & -2 & \cdot \\ 0 & 2 & 0 & 0 & \cdot \end{pmatrix} l_3 + l_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & -2 & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 - L_3 \\ L_3/2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot \end{pmatrix} \begin{matrix} l_1 - l_2 \\ l_2/2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot \end{pmatrix}$$

Écrire les solutions : x, y, t directrices, z est libre

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y = 0 \\ t = 0 \end{cases} \quad (x = z) \quad (x, y, z, t) = \overset{x \ y \ z \ t}{(z, 0, z, 0)}$$

Solution $\mathcal{E} = \{(z, 0, z, 0), z \in \mathbb{R}\}$

3) Vérifier que $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \\ 0 \end{pmatrix}$ est solution du système de départ :

$$\begin{pmatrix} z \\ 2 \\ -1+z \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} z & 0 & -(-1+z) & +1 & \cdot \\ 2z & 2 & -2(-1+z) & +0 & \cdot \\ -z & 2\times 2 & (-1+z) & -1 & \cdot \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} z + 1 - z + 1 = 2 \\ 2z + 2 + 2 - 2z = 4 \\ -z + 4 - 1 + z - 1 = 2 \end{pmatrix}$$

4) Remplacer la dernière colonne des matrices en 2) en partant de $\begin{matrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{matrix}$ est en appliquant les combinaisons linéaire

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} 2l_3 \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} l_2 + l_3 \\ l_3 \, 2l_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} l_3/4 \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} l_2 - 5l_3 \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} l_1 - l_3 \\ l_2 \to l_3 \\ -\frac{1}{2} l_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La réduite de Gauss de la matrice augmentée du système avec second membre

$$\begin{array}{ccccc} x & y & z & t & \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Retour aux variables.

$$\begin{cases} x - z = 1 \\ y = 2 \\ z = z \\ t = 1 \end{cases} \qquad (x, y, z, t) = (1+z, 2, z, 1)$$

D'où les solutions du système de départ.

$E = \{(1+z, 2, z, 1), z \in \mathbb{R}\}$

A la question 3) on a montré que tt quadruplet $(z, 2, -1+z, 1)$ était solution, avons-nous bien le m̂ cas?

z varie ds tt $\mathbb{R}$ il suffit de poser $z' = 1+z$

$(x, y, z, t) = (z', 2, -1+z', 1)$

On récupère la solution ^{tne} en 3)

<u>Conclusion</u>.

Pour un système linéaire ayant une infinité de solution, les solutions sont égales aux solutions du sys homogène plus une solution particulière.

Activité + Récap multiplication matrice x vecteur et solutions de $AX = B$

Exemple de calcul de AX :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y + 2z \\ 3x + 2y + 4z \\ 2x + 5y + 6z \end{pmatrix}$$

Effectuer les produits suivants

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y - 2z \\ 3x - y + 4z + 2t \\ 5x + 2y - z + t \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3y + 4z \\ 2x + y - z \\ -x + y - 2z \\ -y + z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z + t \\ y - z + t \\ x + y + z + t \\ -x + 2y + 2z - t \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y + z + t \\ 2x + y - z + t \\ x + y - z + t \\ y - 2z - t \end{pmatrix}$$

Récap : ts les cas possible lorsque $AX = B$

$A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est la matrice des coefficients

Le vecteur X est p-uplet des variables (ou inconnues)

B est le n-uplet du second mbr.

$B = 0$, le système est homogène $AX = 0$

2 CAS

- Solution unique $S = \{\underbrace{(0 \dots 0)}_{p\text{-uplet nul}}\}$
- Une infinité de solutions données par la variation des variables libres.

$B \neq 0$, le second membre est non nul $AX = B \neq 0$

3 CAS

- Ds la matrice augmentée on a à une étape de l'algoritme de GAUSS une ligne du type : $\underbrace{0 \dots 0}_{p \text{ zéros}}\, b$ avec $b \neq 0$ $S = \varnothing$
- Une solution unique (nécessairement $n = p$) $S = X_0$ où X_0 est un p-uplet non nul.
- Une infinité de solutions et si X_0 est tel que $AX_0 = B$ alors tte solution de $AX = B$ s'écrit $X = X_0 + X_H$ où X_H est solution de $AX = 0$.

Si $\mathcal{E}$ est l'ensemble de solutions de $AX = B$ on écrit $\mathcal{E} = X_0 + \mathcal{E}_H$ puisque ∀ vecteur solution est de la forme $X_0 + X_H$ où $X_H \in \mathcal{E}_H$ et $\mathcal{E}_H$ est l'ensemble des solutions de $AX = 0$.
On a $\mathcal{E} = \{X_0 + X_H,\ X_H \in \mathcal{E}_H\}$

Exo 4×4 homogène. Résoudre $AX = 0$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} l_2 - l_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} l_4 + l_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} l_3 \leftrightarrow l_4 \\ l_4/3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} l_2 - l_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} l_1 - l_2 \\ l_2 \leftrightarrow l_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} -\tfrac{1}{2} l_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} l_2 - l_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

retour au système :

$$\begin{cases} x + t = 0 \\ y + \tfrac{1}{2} t = 0 \\ z - \tfrac{1}{2} t = 0 \end{cases}$$

$(x, y, z, t) = (-t, -1/2\,t, 1/2\,t, \ldots t)$ avec $t \in \mathbb{R}$

On peut ⊗ la solution pour une constante :

$\mathcal{E} = \{(-2t, -t, t, 2t),\ t \in \mathbb{R}\}$

Exo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$, on considère le système $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

1) Si $a = 0$, peut on faire la combinaison $l_3 - a l_1$?

2) Si $a = 0$, Vérifier que $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ a une solut° unique

3) Si $a \neq 0$, faire ce qu'il faut pour que la 1^{er} colonne soit $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et envisager les différents cas possibles.

1) NON, ds l'algo de Gauss on n'a pas le droit de multiplier une ligne par 0.

2) Vérifier cas de Cramer $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 2 \\ 1 & a & 1 & -1 \\ a & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 2 \\ 0 & a-1 & 1-a & -3 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & -1-2a \end{pmatrix} \begin{matrix} l_2 - l_1 \\ l_3 - al_1 \end{matrix}$ La 2 ligne nous conduit à distinguer

le cas $a = 1$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ $S = \emptyset$

Cas $a \neq 1$ On a le droit de X par $\frac{1}{a-1}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 2 \\ 0 & a-1 & 1-a & -3 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & -1-2a \end{pmatrix} l_2/a-1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{-3}{a-1} \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & -1-2a \end{pmatrix} l_3/a-1$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3/a-1 \\ 0 & -1 & -1a & \frac{-(1+2a)}{a-1} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3/a-1 \\ 0 & 0 & -(a+2) & \frac{-2(a+2)}{a-1} \end{pmatrix} l_3 + l_2$

Cas $a = -2$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} l_1 - l_2 \\ \sim \end{matrix} \begin{array}{cccc} x & y & z & \\ \hline \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x - z = 1 \\ y - z = 1 \\ z = z \end{cases}$ $S = \{ (z+1, z+1, z), z \in \mathbb{R} \}$

Cas $a \neq -2$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3/a-1 \\ 0 & 0 & -(a+2) & \frac{-2(a+2)}{a-1} \end{pmatrix} \underset{l_3/-(a+2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3/a-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2/a-1 \end{pmatrix} l_1 - l_2$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a+1 & 2+3/a-1 \\ 0 & 1 & -1 & -3/a-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2/a-1 \end{pmatrix} \underset{\sim}{l_1 - (a+1)l_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2+3/a-1 \; -2(a+1)/a-1 \\ 0 & 1 & -1 & -3/a-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2/a-1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/a-1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/a-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2/a-1 \end{pmatrix}$ $S = \{ (-1/a-1, -1/a-1, 2/a-1) \}$

Premiers produits matriciels

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 4+3 & 8+5 \\ 4-3 & 8-5 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 7 & 13 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 1+3 & 3+1 & 1+5 \\ 1-2+6 & 3-2+2 & 1-4+10 \\ 2+2+3 & 6+2+1 & 2+4+5 \end{matrix} = \begin{matrix} 4 & 4 & 6 \\ 5 & 3 & 7 \\ 7 & 9 & 11 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2+1-3+2 & 1+2-1+2 \\ 2-1+3+2 & 1-2+1+2 \\ 4+1+6+2 & 2+2+2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 2 \\ 13 & 8 \end{pmatrix}$$

$A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ $AB \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$

1) $F = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2} = \frac{x^2-x-1}{x(x+1)^2}$

2) Le coef d'indice max est c : $\frac{x^2-x-1}{x} = (x+1)^2\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}\right)$
on évalue en -1. $\frac{1+1-1}{-1} = -1 = c$

O est pôle simple $a = \frac{P(0)}{Q'(0)}$ avec $Q'(x) = \frac{d}{dx}(x^3+2x^2+x)$

$Q'(x) = 3x^2+4x+1$, $P(0) = -1$ $Q'(0) = 1$ $a = -1$

Choix pour le dernier coef : - soit $\lim_{x \to +\infty}$
- soit évaluer en 1

Evaluation en 1 $\frac{x^2-x-1}{x(x+1)^2} = \frac{-1}{x} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{a}{x+1}$

en 1 : $\cancel{\frac{-1}{4}} = -1 - \cancel{\frac{1}{4}} + \frac{a}{2}$

$\frac{a}{2} = 1 \quad b = 2$

$\frac{x(x^2-x-1)}{x(x+1)^2} = \frac{-x}{(x+1)^2} - \frac{x}{x} + \frac{ax}{x+1}$

quand $x \to +\infty$ $1 = 0 - 1 + a$

3) On trouve les $\rho e^{i\sigma}$ suivant avec $[\sigma \in [0, 2\pi]$
$2\sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{3}}$, $2\sqrt{3}\, e^{2i\frac{\pi}{3}}$, $2\sqrt{3}\, e^{i4\frac{\pi}{3}}$, $2\sqrt{3}\, e^{i\frac{5\pi}{3}}$

4) $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}$ ω est racine 5ème de l'unité $\omega^5 = \left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^5 = e^{i2\pi} = 1$

$\omega^5 = 1$ On développe $(\omega+\omega^4)(\omega^2+\omega^3) = \omega^3+\omega^4+\omega^6+\omega^7$

oui mais $\omega^5 = 1$

$(\omega+\omega^4)(\omega^2+\omega^3) = \omega^3+\omega^4+\omega+\omega^2$ or $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4 = 0$

d'où $(\omega+\omega^4)(\omega^2+\omega^3) = -1$

5) $\frac{z^4-1}{z-1} = \frac{(\cancel{z-1})(z+1)(z^2-1)}{(\cancel{z-1})} = (z+1)(z^2-1) = (z+1)(z-i)(z+i)$
$= (z^2 - zi + z - i)(z+i)$

$= (z^2 + z(-i+1) - i)(z+i)$
$= z^3 + z^2 i + z^2(-i+1) + zi(-i+1) - zi + 1$
$= z^3 + \cancel{z^2 i} - \cancel{z^2 i} + z^2 + z + \cancel{zi} - \cancel{zi} + 1$

$= z^3 + z^2 + z + 1$

6) On pose $Z = \frac{z-2i}{z+2i}$ d'après 5) $Z \in \{-1, i, -i\}$

On doit résoudre $Z=-1$, $Z=i$, $Z=-i$

- $Z = i \Leftrightarrow z - 2i = i(z+2i) \Leftrightarrow z(1-i) = -2+2i$
$= 2(-1+i)$

$\frac{2(-1+i)}{1-i} = -2$

- $Z = -i \Leftrightarrow z - 2i = -i(z+2i) \Leftrightarrow z(1+i) = 2+2i$

$\frac{2(1+i)}{1+i} = 2 = Z.$

- $Z = -1 \Leftrightarrow z - 2i = -(z+2i) \Leftrightarrow z - 2i = -z - 2i \Leftrightarrow z = -z \Leftrightarrow z = 0$

$S = \{0, 2, -2\}$

7) 3^{12}, $3^{12} (3^4)^3$ $\quad 3^4 = 81 = 1[10]$ donc $3^{12} = 1^3 = 1[10]$

8)
$$\begin{array}{l} 157 = 24 \times 6 + 13 \\ 24 = 13 \times 1 + 11 \\ 13 = 11 \times 1 + 2 \\ 11 = 2 \times 5 + 1 \\ 2 = 1 \times 2 + 0 \end{array}$$

$157 \wedge 24 = 1$

PGCD $= 1$

La base de standard de $\mathbb{R}^n$

On appel base de standard de $\mathbb{R}^n$ les vecteurs :

$$\mathcal{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{E}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ex ds $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$$

Exo Écrire $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 21 \\ 1 \end{pmatrix}$ à l'aide de la base standard (de $\mathbb{R}^4$)

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 21 \\ 1 \end{pmatrix} = 4\mathcal{E}_1 + 3\mathcal{E}_2 + 21\mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_4$$

Exo Si $a\mathcal{E}_1 + 2\mathcal{E}_2 - 3\mathcal{E}_3 + b\mathcal{E}_4$ vaut $(5 \ 2 \ -3 \ 0)$

$$\begin{pmatrix} a \\ 2 \\ -3 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad a = 5 \text{ et } b = 0$$

Def Combinaison linéaire.

On considère t vecteurs de $\mathbb{R}^n$: $v_1, \dots, v_t$ et t réels $\lambda_1, \dots \lambda_t$
tels que $\omega = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots \lambda_t v_t$
ω est une combinaison linéaire des vecteurs $v_1, \dots v_t$

Ex

$$\omega = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -21 \\ 1 \end{pmatrix} = 4\mathcal{E}_1 + 3\mathcal{E}_2 - 21\mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_4, \ \omega \text{ est C.L de } \mathcal{E}_1, \dots \mathcal{E}_4$$

$\mathcal{E}_1, \dots \mathcal{E}_4$ la base standard les coef de la C.L. s'appelle les coordonnées de ω dans la base standard.

Def Famille générateur de $\mathbb{R}^n$. Soit $v_1, \dots v_t$ une famille de $\mathbb{R}^n$
On dit que $v_1, \dots v_t$ engendre $\mathbb{R}^n$ (est génératrice de $\mathbb{R}^n$)
ssi

$$\forall \omega \in \mathbb{R}^n, \exists (\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_t) \in \mathbb{R}^t, \ \omega = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_t v_t$$

Signification en termes de système linéaire.

Pr $\forall$ ω ds $\mathbb{R}^n$, on peut trouver $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_t$ tels que
$\alpha_1 v_1, \alpha_2 v_2 + \dots \alpha_t v_t = \omega$, il est équivalent de dire que
le système linéaire

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\text{colonne}} t \\ \text{ligne} \downarrow n \ (v_1, v_2 \dots v_t) \end{array} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_t \end{pmatrix} = \omega$$

a une solution $\forall \omega \in \mathbb{R}^n$

Question : Comment sait-on qu'un système n'a pas de solution ?
Quand la matrice échelonnée réduite présente sur la ligne de la forme :

$$\underbrace{0 \ldots \ldots 0}_{t \text{ zéros}} \underbrace{*}_{\text{membre non nul}}$$

Ce qui peut se formuler : la matrice échelonnée réduite équivalente à $(v_1, v_2 \ldots v_t)$, (la matrice des coef) présente une ligne nulle.

Comme dire que la matrice à une ligne de 0 est équivalent à dire que cette ligne n'a pas de 1 directeur on a le critère matricielle suivant : $v_1, v_2 \ldots v_t$ est générateur de $\mathbb{R}^n$ ssi la matrice échelonnée équivalente à $(v_1, v_2 \ldots v_t)$ a un 1 directeur sur chaque ligne.

Def Sous-espace vectoriel (SEV) engendré par une famille.
Soit $v_1, \ldots v_p$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On appelle SEV engendré par la famille $(v_1, \ldots v_p)$ l'ensemble de toutes les combinaisons linéaire des vecteurs de la famille, on la note vect$(v_1 \ldots v_p)$
Notation ensembliste (extension)
$$\text{vect}(v_1, \ldots v_p) = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_p v_p, (\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_p) \in \mathbb{R}^p\}$$

Rmq La famille $v_1, \ldots v_p$ engendre $\mathbb{R}^n$ ssi vect$(v_1 \ldots v_p) = \mathbb{R}^n$

Caractérisation matricielle d'une famille p vecteurs de $\mathbb{R}^n$
Pour voir si la famille engendre $\mathbb{R}^n$ on forme la matrice $\begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 \ldots & v_p \\ | & | & | \end{pmatrix}$ on échelonne et on compte les 1 directeurs. S'il y a n 1 directeurs la famille engendre $\mathbb{R}^n$

Ex $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ v_1, v_2, v_3 engendre-t-elle $\mathbb{R}^4$?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} L_2 - L_1$$

il y a une ligne de 0
De au plus 3, 1 directeurs
De toute façon qd on échelonne il y a au + 3 1 directeur

Conclusion : pour qu'une famille de $\mathbb{R}^n$ engendre $\mathbb{R}^n$, il faut qu'elle est au moins n vecteurs.

Exo 1) $v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ $v_4 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$ v_1, v_2, v_3, v_4 est elle générateur de $\mathbb{R}^4$?

$$\begin{pmatrix} | & | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ | & | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&1\\1&-1&1&1\\0&0&1&0\end{pmatrix} \xrightarrow{l_2 - l_1} \begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&0&0&1\\1&-1&1&1\\0&0&1&0\end{pmatrix} \xrightarrow{l_3 - l_1} \begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&0&0&1\\0&-2&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix} \xrightarrow{l_3 - l_2} \begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&0&0&1\\0&-2&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\underline{1}&1&1&0\\0&\underline{-2}&0&0\\0&0&\underline{1}&0\\0&0&0&\underline{1}\end{pmatrix}$$ 1 premier coef non nul par ligne de la famille engendre $\mathbb{R}^4$

2) Sans calculs si $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 = \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ est génératrice de $\mathbb{R}^5$? (revient à la définition avec les combinaisons linéaires)

On a montré en 1) que $\forall w \in \mathbb{R}^4$, $\exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ réels tels que : $w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 + 0 v_5$ $(\lambda_5 = 0)$

Enonçons le résultat général : Toute surfamille d'une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$ est génératrice de $\mathbb{R}^n$

Preuve : On suppose : $\forall w \in \mathbb{R}^n$, $\exists \lambda_1 \dots \lambda_p$ réels tel que

$w = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k v_k$ On veut montrer que $v_1, \dots v_p v_{p+1} \dots v_q$

est aussi génératrice de $\mathbb{R}^n$

On sait que $\forall w \in \mathbb{R}^n$, $\exists \lambda_1 \lambda_p$ $w = \lambda_1 v_1 + \lambda_p v_p$ il suffit de prendre $\lambda_{p+1} = \lambda_{p+2} = \dots = \lambda_q = 0$ pour avoir $\sum_{k=1}^{q} \lambda_k v_k = w$ et d'affirmer v_1, v_q génératrice.

Exo Les vecteurs $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$, $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3$, $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$, $\varepsilon_2 + \varepsilon_3$ Où $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4$ désigne la base standard de $\mathbb{R}^4$ forment-ils une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$

$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\varepsilon_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ $\varepsilon_4 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&1\\0&-1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ $\quad$ $\varepsilon_2 + \varepsilon_3$
$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$
$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3$

Il y a 1 ligne de zéro de la matrice échelonnée aura au plus 3 1 directeur. La famille n'engendre pas $\mathbb{R}^4$

Exo Ds $\mathbb{R}^4$: pour quelles valeurs de a les vecteurs $\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2+a\mathcal{E}_3$, $\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2+\mathcal{E}_4$, $\mathcal{E}_2+\mathcal{E}_3$ forment-ils une famille génératrice ?

Echange de ligne

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} l_2 - l_1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} l_2 \leftrightarrow l_3 \\ l_3 \leftrightarrow l_4 \end{matrix}$$

Si $a \neq 0$ la matrice est échelonnée et a 4 1 directeurs, la famille est génératrice

Si $a = 0$, 2 lignes égales de 1 ligne de zéros, la famille n'est pas génératrice.

Def Famille libre de $\mathbb{R}^n$

La famille $v_1, \dots v_p$ est libre dans $\mathbb{R}$ ssi
$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \dots + \lambda_p v_p = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \dots = \lambda_p = 0 \in \mathbb{R}$

Interprétation en terme de systèmes linéaire :

La famille $v_1, \dots, v_p$ est libre ssi le système homogène.

$AX = 0$ où $A = \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_p \\ | & | & | \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix}$ n'admet que la solution nulle.

Ex On considère la famille

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Est-elle libre ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} l_2 - l_1 \\ l_3 - l_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ 4 1 directeurs

Pas de variable libres de 1 solution unique forcément nulle

Def Famille libre de $\mathbb{R}^n$

Caractérisation matricielle d'une famille libre de $\mathbb{R}^n$

La famille $v_1 \dots v_p$ est libre ssi la matrice : $\begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_p \\ | & & | \end{pmatrix}$ est équivalente à une matrice échelonnée qui présente un 1 directeur par colonne

Exo Mq $v_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$ $v_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$ $v_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ est libre

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\1&1&1\\0&0&1\end{pmatrix} \xrightarrow{l_3-l_1} \begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} \xrightarrow[l_3\leftrightarrow l_4]{l_2-l_1} \begin{pmatrix}1&1&1\\0&-2&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} \xrightarrow{/-2} \begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

3 1 directeurs

Exo Ds $\mathbb{R}^3$ $v_1=\begin{pmatrix}2\\\sqrt{7}\\e^2\end{pmatrix}$ $v_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $v_3=\begin{pmatrix}112\\15\\-2\end{pmatrix}$ $v_4=\begin{pmatrix}50\\\sqrt{2}\\-11\end{pmatrix}$

Peut-elle ê libre en $\mathbb{R}^3$?

$\begin{pmatrix}2&0&112&50\\\sqrt{7}&0&15&\sqrt{2}\\e^2&1&-2&-11\end{pmatrix}$ NON car il y a 3 lignes et il y a au plus un 1 directeur / ligne

Exo Soit $v_1 \dots v_p$ une famille libre, on rappelle la déf
$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots \lambda_p v_p = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots \lambda_p = 0$

Mq tte sous famille de $v_1, \dots v_p$ est libre

Une sous famille de $v_1 \dots v_p$ est un sous ensemble de $\{v_1 \dots v_p\}$

Quitte à réindicer (à changer l'indice) on peut considérer que les sous famille correspond aux m premiers vecteurs de $v_1, \dots v_p$.

On veut montrer que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots \lambda_m v_m \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots \lambda_m = 0$

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m + 0 v_{m+1} + 0 v_{m+2} + 0 v_p = 0$

Puisque $v_1, v_2 \dots v_p$ est libre on a : $\lambda = \lambda_2 \dots \lambda_m = 0$

Exo Négation de $A \Rightarrow B$ est A ET NON B
" de $(v_1 \dots v_p)$ est libre (ie $(v_1, \dots v_p)$ est liée) est
$(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p = 0$ et $\exists \lambda_k \in (\lambda_1, \dots \lambda_p) : \lambda_k \neq 0$

D'après ce qui précède montrer que tte famille qui contient le vecteur nul est liée.

La famille $v_1 + \dots v_p$ contient un vecteur nul

Quitte à changer l'ordre on peut supposer $v_1 = 0$

$1.v_1 + 0v_2 + 0v_3 \dots + 0v_p = 0$ Il y a 1 coef non nul ds les combinaisons linéaire

ACT Montrer qu'une famille de vecteurs qui contient 2 fois le m vecteurs liée.

On considère $v_1, v_2, \dots v_p$
Il faut montrer $\exists(\lambda_1, \dots \lambda_p)$ non ts nuls tel que :

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_p v_p = 0$, quitte à changer l'ordre, on peut supposer

$v_1 = v_2$ On prend $\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = -1$ et $\lambda_3 = \dots = \lambda_p = 0$

$v_1 - v_1 + 0v_3 \dots + 0v_p = 0$

Déf Base d'un espace vectoriel
Soit un espace vectoriel V et la famille de vecteurs $B = (v_1, \dots v_p)$ on dit que B est une base de V ssi B est libre et génératrice

Exemple fondamental Montrons que la base standard de $\mathbb{R}^4$ i.e $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$

- libre montrons $x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2 + z\varepsilon_3 + t\varepsilon_4 \Rightarrow x = y = z = t = 0$

$$x\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \text{ d'où } x=y=z=t=0$$

ACT Montrons grâce :
a) Aux solutions d'un système linéaire
b) A la caractérisation matriciel

que la famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ est génératrice de $\mathbb{R}^4$

a) $\forall \omega \in \mathbb{R}^4, \exists (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2 + z\varepsilon_3 + t\varepsilon_4 = \omega$

En terme de système linéaire, pour tout $\omega = \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$ le système

$$\begin{pmatrix} | & | & | & | \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 \\ | & | & | & | \end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} \text{ doit avoir une solution}$$

$$x\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}}_{\varepsilon_1} + y\underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}}_{\varepsilon_2} + z\underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}}_{\varepsilon_3} + t\underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}}_{\varepsilon_4} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$$

GAUSS La matrice des coefs est échelonnée réduite, la matrice augmentée est

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&a\\0&1&0&0&b\\0&0&1&0&c\\0&0&0&1&d\end{array}\right) \quad \begin{cases}x=a\\y=b\\z=c\\t=d\end{cases}$$

b) Caractérisation : on a à la fois un 1 directeur par ligne et un 1 directeur par colonne donc (E_1, E_2, E_3, E_4) est à la fois génératrice et libre.

<u>Exo</u> Montrer que la famille E_1+E_2, E_3+E_4, E_1+E_3, E_4 est une base de $\mathbb{R}^4$

$$\begin{pmatrix} 1&0&1&0\\ 1&0&0&0\\ 0&1&1&0\\ 0&1&0&1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ l_3-l_4 \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1&0&1&0\\ 1&0&0&0\\ 0&0&1&-1\\ 0&1&0&1 \end{pmatrix} l_1-l_2 \begin{pmatrix} 0&0&1&0\\ 1&0&0&0\\ 0&0&1&-1\\ 0&1&0&1 \end{pmatrix} \begin{matrix} l_1\leftrightarrow l_2 \\ l_2\leftrightarrow l_4 \\ \cancel{l_3-l_4} \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&1\\ 0&0&+1&0\\ 0&0&0&+1 \end{pmatrix}$$

<u>Exo Bases</u>

1) Montrer que E_1+E_2, E_3, E_4, E_1+E_3 où les E_i forment la base standard de $\mathbb{R}^4$, est une base de $\mathbb{R}^4$

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&1\\ 1&0&0&0\\ 0&1&0&1\\ 0&0&1&0 \end{pmatrix} l_1-l_2 \begin{pmatrix} 0&0&0&1\\ 1&0&0&0\\ 0&1&0&1\\ 0&0&1&0 \end{pmatrix} l_1\leftrightarrow l_4 \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&1\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

2) On considère la famille : E_1+E_2, E_3, E_4, $E_1+E_2+E_3+E_4$, $E_1+E_3-E_4$
Pourquoi n'est elle pas une base ? NON, car 5 vecteurs.
Extraire une base.

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&1&1\\ 1&0&0&1&0\\ 0&1&0&1&1\\ 0&0&1&1&-1 \end{pmatrix} l_2-l_1 \begin{pmatrix} 1&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&1\\ 0&1&0&1&1\\ 0&0&1&1&-1 \end{pmatrix} l_2\leftrightarrow l_3 \begin{pmatrix} 1&0&0&1&1\\ 0&1&0&1&1\\ 0&0&1&1&-1\\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1&0&0&1\\ 0&1&0&1\\ 0&0&1&-1\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

*

Génératrice : un 1 directeur ds chaque <u>ligne</u>.

Libre : un 1 directeur ds chaque <u>colonne</u>.

On essaie de supprimé la 4ème colonne *
Puis on échelonne

<u>Espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$</u>

$\mathbb{R}_n[X]$ = l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Montrons que la famille $1, x, x^2, x^3$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$

Génératrice : $P = a_0 1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ est une combinaison linéaire des vecteurs $(1, x, x^2, x^3)$

Appliquons la définition de la liberté de la famille $1, x, x^2, x^3$

Considérons une C.L. de vecteurs $1, x, x^2, x^3$

$b_0 1 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 = 0$ un polynôme est nul

Ssi tous ces coeffs sont nuls d'où $b_0 = b_1 = b_2 = b_3 = 0$

De $1, x, x^2, x^3$ est libre.

<u>Exo</u> dans $\mathbb{R}_3[x]$

a) Donner une base de $\mathbb{R}_3[x]$ quel est sa dimension.

b) Montrer sans matrice que P_0, P_1, P_2, P_3 forment une base $\mathbb{R}_3[x]$

$P_0 = (x-1)(x-2)(x-3)$ racines $P_0 : \{1, 2, 3\}$

$P_1 = x(x-2)(x-3)$ $P_1 : \{0, 2, 3\}$

$P_2 = x(x-1)(x-3)$ $P_2 : \{0, 1, 3\}$

$P_3 = x(x-1)(x-2)$ $P_3 : \{0, 1, 2\}$

Indice: ces polynômes servent pour <u>l'interpolation</u>

a) $1, x, x^2, x^3$ $\underset{\text{dimension}}{\dim}(\mathbb{R}_3[x]) = \underset{\text{cardinal}}{\text{card}}(1, x, x^2, x^3) = 4$

b) $P_0\ P_1\ P_2\ P_3$ est une famille de 4 vecteurs dans un espace de dimension 4.

Montrons $\alpha P_0 + \beta P_1 + \gamma P_2 + \delta P_3 = \boxed{0_{\mathbb{R}_3[x]}} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$

Idée on évalue en les racines.

en 0 $\alpha P_0(0) = 0$ or $P(0) \neq 0$ De $\alpha = 0$

$\vdots$

en 3 $\delta P_3(3) = 0$ or $P(3) \neq 0$ De $\delta = 0$

<u>Quelques matrices</u>

Rappel: $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ${}^tM = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ${}^tN = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$${}^t(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = (a_{ji})_{\substack{1 \leq j \leq p \\ 1 \leq i \leq n}}$$

<u>ET</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$$A + {}^tB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Exo Soit $X = (x_1, x_2 \dots x_n)$

Calculer $X{}^tX$ et ${}^tXX$

X est 1 ligne, n colonne, ${}^tX$ est n ligne, 1 colonne.

$A(1,n)\ B(n,1) = C(1,1)$

$A(n,1)\ B(1,n) = C(n,n)$

$$X{}^tX = (x_1 \dots x_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$${}^tXX = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}(x_1 \dots x_j\, x_n) = x_{ij}$$

Caractérisation d'un sous espace vectoriel connu

On admet que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels.

$\mathbb{R}^n$: l'ensemble des n-uplets réels $(x_1, x_2 \dots x_n)$

$\mathbb{R}[x]$: l'ensemble des polynômes à 1 indéterminée et à coef réels

$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$: l'ensemble des matrices (n,p) à coefficients réels.

$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$: l'ensemble des suites à valeurs réelles.

$\mathbb{R}^E$: l'ensemble des applications à valeurs réelles définies sur E

Caractérisation d'un S.E.V. (sous-espace vectoriel), $S \subset E$

- $0_E \in S$
- $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall (u,v) \in S : \alpha u + \beta v \in S$.

$\boxed{\text{ACT}}$

1) Montrer que les fct° affines $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to ax + b$ forment un SEV de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

- $a = b = 0$ donne la fct° nulle
- $f(x) = ax + b \quad g(x) = cx + d$

$$\alpha f + \beta g : x \to \alpha f(x) + \beta g(x) = \underbrace{(\alpha a + \beta c)}_{A \in \mathbb{R}} x + \underbrace{(\alpha b + \beta d)}_{B \in \mathbb{R}}$$

2) Montrons que l'ensemble des suites convergentes est un SEV de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

- $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$ est constante donc égale à sa limite
- On prend (U_n) et (V_n) : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = l$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = m$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha U_n = \alpha l$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \beta V_n = \beta m$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha U_n + \beta V_n = \alpha l + \beta m$

Donc ça converge.

3) Montrer que les fonctions $E =]-1, 1[\to \mathbb{R}$, telles que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$, forment un SEV de $\mathbb{R}^E$

4) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ montrer que $\{X \in \mathbb{R}^p, AX = 0\}$ est un SEV de $\mathbb{R}^p$

3) On vérifie $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

Soient f et g dans E on a $\lim\limits_{x \to 0} \alpha f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \beta g(x) = 0$

d'où $\lim\limits_{x \to 0} \alpha f(x) + \beta g(x) = 0$

4) $A \alpha X$ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a x + \alpha b x \\ \alpha c x + \alpha d x \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} ax + bx \\ cx + dx \end{pmatrix} = \alpha A X$

$A\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ $A\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$ $A\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + by_1 \\ cx_1 + dy_1 \end{pmatrix}$ $\quad A\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_2 + by_2 \\ cx_2 + dy_2 \end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + by_1 + ax_2 + by_2 \\ cx_1 + dy_1 + cx_2 + dy_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2) \\ c(x_1 + x_2) + d(y_1 + y_2) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$

$AX_1 = 0$ et $AX_2 = 0$ $\quad A\alpha X_1 = 0 \quad A\beta X_2 = 0$

et $A(\alpha X_1 + \beta X_2) = 0$

Exo de Gauss

a) Résoudre $\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + y = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$ on note V l'ensemble solution.

b) Vérifier que V est un SEV de $\mathbb{R}^4$

c) Montrer que $-E_1 + E_2 - E_3 + E_4$ est une base de V.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{l_3 - l_1}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{l_1 - l_2}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{matrix} l_1 \leftrightarrow l_3 \\ l_2 \leftrightarrow l_1 \\ l_3 \leftrightarrow l_2 \end{matrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{l_1 - l_2}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x + t = 0 \\ y - t = 0 \\ z + t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = -t \end{cases}$ $\quad V = \{(-t, t, -t, t), t \in \mathbb{R}\}$

b) Si $t=0$ le vecteur vaut $(0,0,0,0) = 0_{\mathbb{R}^4}$

$v_1 = (-t_1, t_1, -t_1, t_1) = t_1(-1,1,-1,1)$

$v_2 = t_2(-1,1,-1,1)$

$\alpha v_1 + \beta v_2 = \alpha t_1(-1,1,-1,1) + \beta t_2(-1,1,-1,1)$

$\alpha v_1 + \beta v_2 = (\alpha t_1 + \beta t_2)(-1,1,-1,1) \in V$

c) $-\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_4 = (-1,1,-1,1)$

$V = \{t(-1,1,-1,1), t \in \mathbb{R}\}$

Montrer que $\underset{(-1,1,-1,1)}{t}$ est générateur et libre dans V.

Liberté $\alpha b = 0 \Rightarrow b = 0$ b est non nul.

Générateur : $t(-1,1,-1,1)$ est une combinaison linéaire (à 1 terme) de b.

<u>Exo</u> <u>Reprise de $\{x \in \mathbb{R}^p, AX=0\}$ est un espace vectoriel</u>

a) <u>Déterminer l'ensemble $E = \{x \in \mathbb{R}^3, AX=0\}$</u>

b) <u>Montrer que E est un SEV de $\mathbb{R}^3$ (conseil prendre 2 vecteurs v_1 et v_2)</u>

c) <u>Montrer que $(-2,0,1)$ est une base de E.</u>

a) $A\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ l_2 - 2l_1 \\ l_3 + l_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -1/6\, l_2 \\ 1/5\, l_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} l_1 - 3l_2 \\ \\ l_3 - l_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Solutions $AX=0$

$\begin{array}{c} x \quad y \quad z \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$ $\begin{cases} x + 2z = 0 \\ y = 0 \\ z = z \end{cases}$ $\begin{cases} x = -2z \\ y = 0 \\ z = z \end{cases}$ $E = \{(2z, 0, z), z \in \mathbb{R}\}$

b) Pour montrer que E est un SEV de $\mathbb{R}^3$
On montre
- $0_{\mathbb{R}^3} \in E$
- $\forall \alpha$ et β dans $\mathbb{R}$, $\forall v_1$ et v_2 dans E, $\alpha v_1 + \beta v_2 \in E$.

$E = \{z(-2,0,1)\ z \in \mathbb{R}\}$

- quand $z=0$ on obtient $(0,0,0)$ qui est dans E.
- $v_1 = z_1(-2,0,1)$ $v_2 = z_2(-2,0,1)$

On prend α, β ds $\mathbb{R}$: $\alpha v_1 + \beta v_2 = \alpha z_1(-2,0,1) + \beta z_2(-2,0,1)$

$= (\alpha z_1 + \beta z_2)(-2,0,1) \in E$

c) Montrons que $b = (-2, 0, 1)$ est libre dans $\mathbb{R}^3$ et générateur de E.

- b libre dans $\mathbb{R}^3$; $\alpha b = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ car $b \neq 0$

Déf liberté $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$
$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$
$\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$

- Tt vecteur de E peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs de la famille $\{b\}$

Tt vecteur de E s'écrit γb est dc une CL de b.

Exo Matrice

Calculer AB avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{array}{ccc|cccc} & & & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & & & 1 & 2 & -2 & 1 \\ & & & 1 & 4 & -4 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$1+0-1$ $\quad 0+0-4 \quad 0+0+4 \quad 1+0-1$
$2+0-2 \quad 0+0-8 \quad 0+0+8 \quad 2+0-2$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & -8 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Exo 2

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Exo Puissance d'une matrice carré

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calculer A^2, A^3
b) Conjecturer la forme A^k
c) Montrer les résultats par récurrence

a)
$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^2 A = A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 16 & 16 & 16 & 16 \\ 16 & 16 & 16 & 16 \\ 16 & 16 & 16 & 16 \\ 16 & 16 & 16 & 16 \end{pmatrix}$$

b) A^k $\quad A^2 = 4A$ $\quad$ alors $A^k = 4^{k-1} A$
$A^3 = A^2 A$
$= 4^2 A$

c) $A^1 = 4^{1-1} A = 4^0 A = A$ $\quad$ pour $k \geqslant 1$

$HR \to A^k = 4^{k-1} A$ $\qquad HR(k) \to HR(k+1)$: $A \cdot A^k = 4^{k-1} A \cdot A \Leftrightarrow A^{k+1} = 4^{k-1} \cdot 4A = 4^k A$

Exo Associativité $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Montrer que $(AB)C = (BC)A$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

AB (AB)C

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

BC $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ A(BC) $\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -3 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -3 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Matrice Inverse : definition + ex.

Idée d'inversibilité

- Nb réels, un réel x est inversible ssi il existe un réel y tel que $xy = 1$ cette relation implique $x \neq 0$ et $y \neq 0$
$y = \frac{1}{x}$
- Fonctions de $E \to F$, f est inversible ssi f est une bijection de $E \to F$ puisque ds ce cas il existe une fonct° $g : F \Rightarrow E$ telle que : $f \circ g = Id$ $g \circ f = Id_E$

Notation ds ces 2 cas on note $y = x^{-1}$ et $g = f^{-1}$

Avec les matrices : une matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible ssi il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $AB = I_n$ et $BA = I_n$

$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

Ds ce cas B s'appelle l'inverse de A et est notée $B = A^{-1}$

Ex Ds $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ $B = A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

$AB = $ $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ $BA = $ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

~~Exo~~

Exo Montre que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont inverse l'un de l'autre

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exo Soit $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ Calculer Q^2

$$\begin{array}{cc} Q^2 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$= 2I_4$ Pour trouver Q^{-1} il faut utiliser $Q^2 = 2I_4$

$QQ = 2I_4 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}Q\right)Q = I_4$ $\quad Q\left(\frac{1}{2}Q\right) = I_4$ $\quad Q^{-1} = \frac{1}{2}I_4$

Méthode du système associé

On considère une matrice inversible $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Résoudre le système $AX = B$ avec B vecteur inconnu de $\mathbb{R}^n$ permet de déterminer A^{-1}.

$AX = B \Leftrightarrow A^{-1}.AX = A^{-1}B \Leftrightarrow IX = A^{-1}B$

$IX = X$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

$X = A^{-1}B$

La solution unique du système linéaire donne (si on la lit dans le bon sens !) les coefficients de A^{-1}

GAUSS. (* coefficient quelconque) De poly L1 $\left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & y_1 \\ * & * & * & y_2 \\ * & * & * & y_3 \\ * & * & * & y_4 \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{ccc|c} * & * & * & x \\ * & * & * & y \\ * & * & * & z \\ * & * & * & t \end{array}\right) \sim \text{GAUSS} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & \text{C.L de } x,y,z,t \\ & \ddots & & \\ & & & \\ 0 & & 1 & \end{array}\right)$ après avoir remis dans l'ordre

Ds l'ordre x, y, z, t on a

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & & & 0 & C_{11}x + C_{12}y + C_{13}z + C_{14}t \\ & \ddots & & & \text{-- -- -- -- --} \\ & & \ddots & & \text{-- -- -- -- --} \\ 0 & & & 1 & C_{41}x + C_{42}y + C_{43}z + C_{44}t \end{array}\right) \quad A^{-1} = (C_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 1 & y \\ 1 & 0 & 1 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 2 & 0 & z-x \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}(z-x) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right) \frac{1}{2}L_3$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & x + \frac{1}{2}(z-x) \\ 0 & 1 & 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}(z-x) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z \\ 0 & 1 & 0 & 0 & y-t \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right) \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exo

Inverser $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ par système associé

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & -1 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & 0 & t \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & -1 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -z \\ 0 & 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x \end{array}\right) \quad A^{-1} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

On fait le produit de A et A^{-1}.

$$A\,A^{-1} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vérification
Diagonale de 1, caratéristique de l'inverse.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple

$A = \begin{pmatrix} 2 & 25 & -6 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$ Une matrice est triangulaire est inversible ssi ts les coefs de la diagonale sont non nuls.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 25 & -6 & x \\ 0 & 3 & 5 & y \\ 0 & 0 & -12 & z \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 25 & -6 & x \\ 0 & 3 & 5 & y \\ 0 & 0 & 6 & -\frac{1}{2}z \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 25 & 0 & x + -\frac{1}{2}z \\ 0 & 3 & 5 & y \\ 0 & 0 & 6 & -\frac{1}{2}z \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & x + -\frac{1}{2}z - 8y \\ 0 & 24 & 40 & 8y \\ 0 & 0 & 6 & -\frac{1}{2}z \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & x + -\frac{1}{2}z - 8y \\ 0 & 3 & 5 & y \\ 0 & 0 & 6 & -\frac{1}{2}z \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & x - \frac{1}{2}z - 8y \\ 0 & 3 & 5 & y \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2}z\,\frac{1}{6}z \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & x - \frac{1}{2}z - 8y \\ 0 & 3 & 6 & y - \frac{1}{2}z\,\frac{1}{6}z \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2}z\,\frac{1}{6}z \end{array}\right)$$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 50 & -12 & 2x \\ 0 & 3 & 5 & y \\ 0 & 0 & 12 & -z \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 50 & 0 & 2x - z \\ 0 & 3 & 5 & y \\ 0 & 0 & 12 & -z \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 50 & 0 & 2x - z \\ 0 & 3 & 0 & y + \frac{5}{12} z \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-z}{12} \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 0 & 2x - \frac{50}{3} y - z - \frac{250}{36} z \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} y + \frac{5}{36} z \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{z}{12} \end{array}\right)$$

$$\frac{1}{4}\left(2x - \frac{50y}{3} - z - \frac{250}{36} z\right) = \frac{x}{2} - \frac{25}{6} y - \frac{z}{4} - \frac{125}{72} z$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{25}{6} y - \frac{18 + 125}{72} z$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{x}{2} - \frac{25}{6} y - \frac{143}{72} z \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} y + \frac{5}{36} z \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{12} z \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{25}{6} & -\frac{143}{72} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{5}{36} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

Matrice à inverser (4×4 assez creuse)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ à inverser par système associé, i.e résoudre.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 & x \\ 0 & 0 & -1 & 1 & y \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z \\ -1 & 0 & 1 & 1 & t \end{array}\right) \overset{l_1 + l_4}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 2 & 3 & x + t \\ 0 & 0 & -1 & 1 & y \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z \\ -1 & 0 & 1 & 1 & t \end{array}\right) \overset{l_1 - 2l_3}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 2 & 3 & x + t - 2z \\ 0 & 0 & -1 & 1 & y \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z \\ -1 & 0 & 1 & 1 & t \end{array}\right)$$

$$\overset{l_1 + 2l_2}{\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 5 & x + t - 2z + 2y \\ 0 & 0 & -1 & 1 & y \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z \\ -1 & 0 & 1 & 1 & t \end{array}\right)} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & (x + t - 2z + 2y)\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -y \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -t \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & (x + t - 2z + 2y) \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -y + x + t - 2z + 2y + \frac{1}{5} h \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z \\ 1 & 0 & 0 & -2 & -t - y \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & (x + t - 2z + 2y) \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -y + x + t - 2z + 2y + \frac{1}{5} h \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -t - y + 2(x + t - 2z + 2y + \frac{1}{5} h) \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -t - y + 2x + 2t - 4z + 4y + 2\left(\frac{1}{5}(x + t - 2z + 2y)\right) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -y + x + t - 2z + 2y + \frac{1}{5}(x + t - 2z + 2y) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & (x + t - 2z + 2y)\frac{1}{5} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & x - 2z + y - \frac{3}{5}(x + 2y - 2y + t) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5}(x - 3y - 2z + t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5}(x + 2y - 2z + t) \end{array}\right) \qquad A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exo Inverser $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et en déduire la solution du système $AX = B$ avec $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & 1 & t \end{array}\right) \underset{l_1 - l_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & x-y \\ 1 & 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & 1 & t \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & x-y \\ 1 & 0 & 0 & 0 & y-t \\ 0 & 0 & 1 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t-z \end{array}\right) \underset{l_1 \leftrightarrow l_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & y-t \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x-y \\ 0 & 0 & 1 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t-z \end{array}\right)$$

$l_2 - l_4 \quad l_3 - l_4$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad AX = B \iff A^{-1}B \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A est inversible $AX = B$
$\iff A^{-1}AX = A^{-1}B \iff X = A^{-1}B$
on $\times$ à gauche.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exo Inverse et transposer

Pro : si A est inversible ${}^tA$ aussi, et on a : $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Question : déterminer sans calcul l'inverse de ${}^tA$

$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1}) = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Rappel transposé les lignes deviennent des colonnes

b) Une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique ssi ${}^tA = A$
Montrer que si A est symétrique et inversible alors A^{-1} est symétrique.

Montrons que A^{-1} est égal à sa transposée.
Montrons ${}^t(A^{-1}) = A^{-1}$

${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$ est symétrique donc ${}^tA = A$

D'où $({}^tA)^{-1} = A^{-1}$

Exo Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Résoudre ds $\mathbb{R}^4$, $Ax=0$, on note $E = \{x \in \mathbb{R}^4 ; Ax = 0\}$

donner une base de E, puis exprimer les vecteurs de cette base en fonction des vecteurs de la base standard de $\mathbb{R}^4$: $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ l_2 - 2l_1 \\ l_3 - l_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ l_2 - 3l_3 \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ l_3 \leftrightarrow l_2 \\ -l_2 \end{matrix} \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & t \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} l_1 - l_3 \\ l_1 + l_2 \\ l_2 - l_3 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x = -z \\ y = z \\ z = z \\ t = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} (x,y,z,t) &= (-z, z, z, 0) = z(-1,1,1,0) \\ E &= \{ z(-1,1,1,0), z \in \mathbb{R} \} \end{aligned}$$

Une base de E est $B = \{(-1,1,1,0)\}$ qui peut s'écrire
$(\varepsilon_i)_{i \in [1;4]}$ note la base standard de $\mathbb{R}^4$

$B = \{-\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3\}$

Exo Soit $f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ Résoudre $fx = 0$ et determiner une base de $E\{x \in \mathbb{R}^4 ; fx = 0\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ l_2 + l_3 \\ \\ l_4 + l_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} l_1 - l_3 \\ \\ \\ l_4 - l_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} -l_1 \\ l_2 - 2l_1 \\ l_3 - l_1 \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = -z \\ y = -t \\ z = z \\ t = t \end{cases} \qquad E = \{ (-z, -t, z, t) \ (z,t) \in \mathbb{R}^2 \}$$

$$\begin{aligned} (-z, -t, z, t) &= (-z, 0, z, 0) + (0, -t, 0, t) \\ &= z(-1, 0, 1, 0) + t(0, -1, 0, 1) \end{aligned}$$

$$B = \{ (-1, 0, 1, 0), (0, -1, 0, 1) \} = \{ -\varepsilon_1 + \varepsilon_3, -\varepsilon_2 + \varepsilon_4 \}$$

Exo

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & x \\ 0 & 1 & -1 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right) l_1 + l_2 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & x+y \\ 0 & 1 & -1 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right) l_2 + l_3 - l_4 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & x+y \\ 0 & 1 & 0 & 0 & y+z-t \\ 0 & 0 & 1 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right) l_1 - l_3 - 2l_4$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & x+y-z-2t \\ 0 & 1 & 0 & 0 & y+z-t \\ 0 & 0 & 1 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \end{array}\right) \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{Vérif} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Théorème Ds poly L1 Théorème des carré

IMPORTANT

Soit A élément $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ les propositions suivantes sont équivalentes

1) A est inversible
2) $\forall b \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vecteur colonne $AX = b$, a une solution unique $X = A^{-1}b$
3) $AX = 0$ n'a que $X = 0$ comme solution
4) A est équivalente par lignes (par GAUSS) à I_n.

Illustration

Que se passe t il quand on résout $AX = 0$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \qquad x = y = z = t = 0$$

Le système homogène n'admet que $(0, 0, 0, 0)$ comme solution.

Résoudre $\begin{cases} x + y - 2z = 2 \\ \quad\; y - z = 1 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} l_1 - l_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} x - z = 1 \\ y - z = 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} x = z + 1 \\ y = z + 1 \end{matrix}$$

$$E = \{(1+z, 1+z, z), z \in \mathbb{R}\}$$

pour $a \neq 1$ Résoudre

$$\begin{cases} x + y + az = 2 \\ \quad\; y - z = \frac{-3}{a-1} \\ \qquad\; z = \frac{2}{a-1} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{-3}{a-1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{a-1} \end{pmatrix} l_2 + l_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{a-1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{a-1} \end{pmatrix} l_1 - l_2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & \frac{-2(a-1)}{a-1} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{a-1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{a-1} \end{pmatrix} l_1 - l_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a-1 & \frac{2a}{a-1} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{a-1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{a-1} \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x + z(a-1) = \frac{2a}{a-1} \\ y = \frac{1}{a-1} \\ z = \frac{2}{a-1} \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3/a-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2/a-1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a+1 & 2+(3/a-1) \\ 0 & 1 & -1 & -3/a-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2/a-1 \end{array}\right) \overset{l_1 - l_2}{} \overset{l_1-(a+1)l_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2+\frac{3}{a-1}-\frac{2(a-1)}{a-1} \\ 0 & 1 & -1 & -3/a-1 \\ 0 & 0 & 1 & 2/a-1 \end{array}\right)$$

$l_2 + l_3$ donne

$$\left(I_n \;\middle|\; \begin{array}{c} \frac{2a-2+3-2a-2}{a-1} = \frac{-1}{a-1} \\ \frac{-1}{a-1} \\ 2/a-1 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{a-1} \\ \frac{-1}{a-1} \\ \frac{2}{a-1} \end{pmatrix}$$

Determinants

Att !! : le déterminant d'une matrice n'est défini que si elle est CARRE

Le déterminant d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un réel

Ex: $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1\times 1 - 2\times 3 = -5$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1\times 2\times 4 = 8$

Principe pour calculer un déterminant

I On met en évidence la proportionalité de 2 lignes ou 2 colonnes et on conclut que le déterminant est nul.

II On se ramène à une matrice triangulaire et le déterminant vaut le produit des termes diagonaux

⚠ Les règles ne sont pas les même que pour GAUSS.

III On utilise la formule cofacteurs (ou du developpement) c.à.d. on développe par rapport à une ligne ou une colonne bien choisie

Règle de calcul : lorsqu'on échange 2 lignes d'un déterminant il est multiplié par -1

Ex1 $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\times 2 - (-1)\times 1 = 7$ $\quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1\times(-1) - 3\times 2 = -7$

Ex2 D'après la règle II, il est claire que si $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

$|I_n| = 1$ On en déduit que $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$

Exo Soit $\Pi = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Calculer $|\Pi| = \det \Pi$ et $|N| = \det N$

$\Pi = -1^4 = 1$

$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot |I_n| = 1$

$-1 \times I_n = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1 \quad |I_n| = -1$

on échange 2 ligne

$-1 \times -1^4 = -1$.

Correction

Π $l_1 \to l_2$ $l_2 \to l_3$ $l_3 \to l_4$ $l_4 \to l_5$

$|\Pi|(-1)^4 = |I_5| = 1$ doc $|\Pi| = 1$

Pour N c'est pareil $l_5 \to l_4$ $l_4 \to l_3$ $l_3 \to l_2$ $l_2 \to l_1$

$|N|(-1)^4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (-1)^5 \iff |N| = -1$

Regle de Calcul

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, det A ne change pas si l'on ajoute à une ligne (respectivement à une colonne) un multiple d'une autre ligne (resp colonne).

⚠ Le déterminant est multiplier par k lorsqu'on multiplie une de ses lignes (resp. colonne) par k.

Conséquences utiles dans la pratique

Puisque un déterminant est nul si la matrice à une ligne (resp. colonne) nulle, le déterminant sera aussi nul si la matrice a 2 lignes (resp. colonnes) proportionnelles. En particulier si la matrice a 2 lignes (resp colonnes) égales.

Exo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 111 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 121 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 132 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 147 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 158 \end{pmatrix}$ Montrer avec les règles précédentes que det $A = 0$.

$C_4 - C_2$ $C_3 - C_1$ ou aussi $C_2 - C_1$ $C_4 - C_3$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 111 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & 121 \\ 3 & 4 & 2 & 2 & 132 \\ 4 & 5 & 2 & 2 & 147 \\ 5 & 6 & 2 & 2 & 158 \end{pmatrix} = \det A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 111 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 121 \\ 3 & 1 & 5 & 1 & 132 \\ 4 & 1 & 6 & 1 & 147 \\ 5 & 1 & 7 & 1 & 158 \end{pmatrix} = 0$ car C_2 et C_4 sont égales
C_3 et C_4

Exo 2 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (A quelconque)

a) exprimer $\det(-A)$ en fonction de $\det A$
b) exprimer $\det(\lambda A)$.

a) $\det(-A) = (-1)^n \det A$
b) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$

Pro le déterminant est multiplicatif i.e $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n^2(\mathbb{R})$
on a : $\det AB = \det A \det B$

ACT a) Montrer que si A est inversible $\det A \neq 0$
et $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

b) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ Calculer AB et vérifier que $\det AB = \det A \det B$

a) $AA^{-1} = I_n$ dc $(\det A)(\det A^{-1}) = \det I_n = 1$
Si $(\det A)(\det A^{-1}) = 1$ dc $\det A \neq 0$ $\det A^{-1} \neq 0$

$\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

b)

AB $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$(\det A)(-1)^3 = \det I_4 = 1$ soit $\det A = \dfrac{1}{(-1)^3} = -1$

$\det AB =$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\det A = (-1)^3 A = -1$
$\det B = 36$

De $\det A$ et $\det B = -36$

$(\det(AB))(-1)^3 = \det B = 36$ $(\det AB) = -36$.

Developpement par rapport à une ligne ou une colonne

Principe : diminuer la taille de sous determinants jusqu'à obtenir des determinants 2x2

Exp $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ On developpe / à c3.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \cancel{+0 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} - 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \cancel{+ 0 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}}$$

On supprime vu que le coef = 0

calcule du determinant

$$-5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5(2-3) = 5$$

Exo Calculer det A, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ en dév / C_4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \det A = \underset{(-1)^{1+4}}{-1} \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \cancel{+ 0 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}} \underset{(-1)^{3+4}}{-1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \cancel{+ 0 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}$$

$(1+4) \to 1^{er}$ ligne $4^{ème}$ colonne

$$\det A = -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -(7 + 2 + 2 - 12) = -(-1) = 1$$

Exo Utiliser le développement pour calculer

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \det X = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \cancel{\det W = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -2}$$

$$\det W = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

Calculer det $f = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} \underset{(-1)^{2+1}}{=} -2 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$

$(-1)^3$

$-2 \times (2 \times 4 + 2 \times 4) = 16$

$= -32$

Calculer $C = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

réduction $C = \begin{vmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ $l_1 + l_3$ $\begin{vmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ $l_2 + l_3$ $\begin{vmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 8 \end{vmatrix}$ $l_3 + l_2$

$\begin{vmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 8 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = -1(6 \times 8 - 3 \times 1) = -1 \times 45 = -45$

$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ $l_1 - l_4$ $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$

$C_1 + 3C_3$

$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 2(-4-10) = -28$

Exo

Mettre ce déterminant sous la forme d'un polynôme factorisé au sens du TFA (théorème fondamental ...)

$G = \begin{vmatrix} 1 & -x & 2+2x \\ x-1 & 0 & 0 \\ -2x-1 & 1 & -x-1 \end{vmatrix} \overset{(-1)^3}{=} +x+1 \begin{pmatrix} -x & 2+2x \\ 1 & -x-1 \end{pmatrix}$

$= (x+1)(x(x+1) - 2(x+1))$

$= +x+1 \left((-x \times (-x-1)) - (1 \times (2+2x)\right)$

$= (x+1)^2 (x-2)$

$J = \begin{vmatrix} x & 3 & 3 \\ 3 & x & 3 \\ 3 & 3 & x \end{vmatrix}$ $l_2 - l_3$ $\begin{vmatrix} x & 3 & 3 \\ 0 & x-3 & 3-x \\ 3 & 3 & x \end{vmatrix}$ $l_3 - l_1$ $\begin{vmatrix} x & 3 & 3 \\ 0 & x-3 & 3-x \\ 3-x & 0 & x-3 \end{vmatrix}$

"$(3-x) \times (-1)^{2+1}$"

$(x-3) \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ x-3 & 3-x \end{vmatrix} + x-3 \begin{vmatrix} x & 3 \\ 0 & x-3 \end{vmatrix}$

Rappel $= \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ x-3 & 3-x \end{vmatrix} = 3(x-3) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -6(x-3)$

$J = -(3-x)(-6)(x-3) + (x-3)\,x\,(x-3)$

$= -6(x-3)^2 + x(x-3)^2$

$= (x-3)^2 (x-6)$

Application linéaire

Déf une application $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ est linéaire
ssi $\forall (k, \vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$

$$f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$$
$$f(k\vec{u}) = k f(\vec{u})$$

En analyse m̂ chose pour la dérivateur

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}(u+v) = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx} \\ \dfrac{d}{dx}(ku) = k\dfrac{du}{dx} \end{cases}$$

Ex $X \in \mathbb{R}^p$ $X = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ $Y \in \mathbb{R}^n$ $Y = (x_1, \dots, x_n)$

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = x_1 + 4x_2 + 16x_3 \\ y_3 = x_1 - x_2 + 7x_3 \end{cases}$$ définit une application linéaire de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

Idée : chaque y_i est une combinaison linéaire des x_j.

Théorème : pour définir une application linéaire $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ il suffit de connaître les images par f des vecteurs de la base standard.

Ex : De $\mathbb{R}^3$ ← au départ de f Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \mathcal{E}_1 + x_2 \mathcal{E}_2 + x_3 \mathcal{E}_3$

Soit f linéaire $f(X) = f(x_1\mathcal{E}_1 + x_2\mathcal{E}_2 + x_3\mathcal{E}_3)$

on a $f(X) = x_1 f(\mathcal{E}_1) + x_2 f(\mathcal{E}_2) + x_3 f(\mathcal{E}_3)$

prenons $f(\mathcal{E}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $f(\mathcal{E}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $f(\mathcal{E}_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$f(X) = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{matrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ 0 + x_2 - x_3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 \end{matrix}$$

Si on note $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ $y = f(X)$ s'écrit $\begin{cases} y_1 : x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 : x_2 - x \\ y_3 : x_1 + x_2 + 2x_3 \\ y_4 : 2x_1 + x_2 - 2x_3 \end{cases}$

On a bien C.C des x_1, x_2, x_3

Base de $\mathbb{R}_3[x]$ $\mathcal{E}_1 = 1$ $\mathcal{E}_2 = x$ $\mathcal{E}_3 = x^2$ $\mathcal{E}_3 = x^3$

Généralisation Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ définie par :

$f(\mathcal{E}_1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \quad f(\mathcal{E}_2) = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} \quad f(\mathcal{E}_3) = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ \vdots \\ a_{n3} \end{pmatrix} \quad \dots \quad f(\mathcal{E}_p) = \begin{pmatrix} a_{1p} \\ a_{2p} \\ \vdots \\ a_{np} \end{pmatrix}$

La matrice standard de f, càd $M_f = \begin{matrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{matrix}$

ACT Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par :

$f(\mathcal{E}_2) = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad f(\mathcal{E}_3) = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix} \quad f(\mathcal{E}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \quad f(\mathcal{E}_4) = \begin{pmatrix} -3 \\ 15 \\ 24 \end{pmatrix}$

1) Donner $M_f = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 4 & -3 \\ 5 & 0 & 5 & 15 \\ -1 & 4 & 11 & 24 \end{pmatrix}$

2) Calculer $f(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + 2\mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
faire le calcule

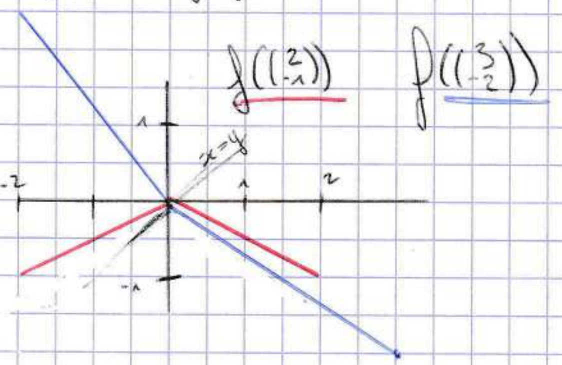
Ex d'applications linéaire

La réflexion (symétrie axiale) d'axe Oy

$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$ la matrice est $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

La réflexion R par rapport à la droite d'équation $y = x$
de matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

ACT figurer sur le plan $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$
$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $f\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$



Théorème (1 des 2 gros du chapitre) IMPORTANT

Soit $f : \underset{E}{\mathbb{R}^p} \to \underset{F}{\mathbb{R}^n}$ de matrice standard

$A = \underbrace{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{np} \end{matrix}}_{\dim E = p} \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ a \\ a \end{matrix}}\right\} \dim F = n$

1) f_A est injective ssi la matrice échelonnée réduite a autant de 1 directeurs que de colonne

2) f_A est surjective ssi la réduite de GAUSS a autant de 1 directeurs que de ligne

3) Cas particulier

$p = n$ Les propriétés suivantes sont équivalentes

i) f_A est surjective
ii) f_A est injective
iii) f_A est bijective
iv) A est inversible

Remarque :

Si A est inversible la matrice A^{-1} est la matrice standard de f_A^{-1}

Exo 1

a) Quelle est la matrice de l'appli lin définie par :

$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $f(\mathcal{E}_1) = \mathcal{E}_1 + 2\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_4 + 3\mathcal{E}_3$, $f(\mathcal{E}_2) = \mathcal{E}_4 + 2\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 + 3\mathcal{E}_3$

$f(\mathcal{E}_3) = \mathcal{E}_3$, $f(\mathcal{E}_4) = \mathcal{E}_1 - 2\mathcal{E}_2 - 3\mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_4$

$f(\mathcal{E}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ $f(\mathcal{E}_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $f(\mathcal{E}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $f(\mathcal{E}_4) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$f(\mathcal{E}_1)$ $f(\mathcal{E}_2)$ $f(\mathcal{E}_3)$ $f(\mathcal{E}_4)$ en tant que vecteurs colonnes de $\mathbb{R}^4$ (de $\mathbb{R}^n$ ds le cas général)

b) f est elle une bijection $\mathbb{R}^4 \Rightarrow \mathbb{R}^4$?
$\Rightarrow \mathcal{A}_f$ est-elle inversible ?

Non car $l_1 = -l_4$ de $|\mathcal{A}_f| = 0$, la matrice est non inversible
($\mathcal{A}$ est inversible ssi $\det \mathcal{A} \neq 0$)

même chose $c_2 = -c_4$ autre raison pour laquelle $|\mathcal{A}_f| = 0$

Interprétat° avec l'injectivité, quest° utilisez $C_2 = -C_4$ et la linéarité de f pour contredire l'injectivité

Si $f : E \to F$ est injective alors $f(v_1) = f(v_2) \Rightarrow v_1 = v_2$

$f(\mathcal{E}_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $f(\mathcal{E}_4) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ $f(\mathcal{E}_2) \Leftrightarrow -f(\mathcal{E}_4) \Rightarrow f(\mathcal{E}_2) \Leftrightarrow f(-\mathcal{E}_4)$

On a $f(\mathcal{E}_2) = f(-\mathcal{E}_4)$ et $\mathcal{E}_2 \neq -\mathcal{E}_4$, f non injective

Exo Donner un exemple d'une application linéaire $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ et donner sa matrice standard.

y_1 ou $y = -3x_2 - x_1 + x_3 + 4x_4$

Écrire la matrice standard de $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$

$1 \downarrow \overrightarrow{(-1\ -3\ 1\ 4}^{4}$ $\quad (x_1, x_2, x_3, x_4) \to -3x_2 - x_1 + x_3 + 4x_4$

Noyau d'une App linéaire

Déf Soit f une app lin $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ sa matrice standard

Le noyau de f, noté $\mathrm{Ker}(f)$ est l'ensemble des X de $\mathbb{R}^p$ tels que $f(X) = 0$.

Ces vecteurs sont les solutions de l'équation du système homogène $AX = 0$.

Cet ensemble $\mathrm{Ker}(f) = \{X \in \mathbb{R}^p, AX = 0\}$ est un S.E.V de $\mathbb{R}^p$

Preuve : un SEV S est caractérisé par :

1) $0 \in S$
2) Si u et v sont ds S alors $\alpha u + \beta v \in S$
1) $\alpha X = 0$ $AX = 0$
2) Soient $(u, v) \in (\mathrm{Ker} f)^2$
$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$, or $f(u) = f(v) = 0$
donc $f(\alpha u + \beta v) = 0$
et $\alpha u + \beta v \in \mathrm{Ker} f$

Noyau et injectivité : $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ LINÉAIRE est injective ssi $\mathrm{Ker} f = \{0\}$

Preuve : $\mathrm{Ker} f = \{0\} \Rightarrow f$ injective

Soient u et v ds $\mathbb{R}^p$ avec $f(u) = f(v)$ alors $f(u - v) = 0$ puisque $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$ on a $u - v = 0$

Si f est injective on a $f(u) = f(v) \Rightarrow u = v$

Si $u \in \mathrm{Ker} f$ on a $f(u) = 0 = f(0) \Rightarrow u = 0$

Exo Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $f_J : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de mat standard

J. Determine $\operatorname{Ker} f_J$, une base de $\operatorname{Ker}(f_J)$ et $\dim \operatorname{Ker} f_J$.

La resolution de $JX = 0$ est immidiate

$$J \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$ x directrice, y, z libre

$x = -y - z$
$y = y$
$z = z$

$(x, y, z) \in \operatorname{Ker} f_J$ est de la forme $(-y-z, y, z)$

$$\operatorname{Ker} f_J = \{(-y-z, y, z), (y,z) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$(-y-z, y, z) = (-y, y, 0) + (-z, 0, z)$$
$$= y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1)$$
$$= y v_1 + z v_2$$

$B = (v_1, v_2)$ et $\dim \operatorname{Ker} f_J = 2$) y et z

Remarque $v_1 = -\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad v_2 = -\varepsilon_1 + \varepsilon_3$

Exo Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) f est elle injective ?

On a $f(\varepsilon_2) = f(-\varepsilon_4)$ et $\varepsilon_2 \neq \varepsilon_4$, f non injective

$f(\varepsilon_2) = -f(\varepsilon_4) \Rightarrow f(\varepsilon_2) = f(-\varepsilon_4)$ Et $C_3 = 4C_1$ et $C_2 = -C_4$

$f(\varepsilon_3) = 4 f(\varepsilon_1) \Leftrightarrow f(\varepsilon_3) \Leftrightarrow f(4\varepsilon_1)$
$\varepsilon_3 \neq 4\varepsilon_1$

b) Déterminer Ker(f)

$L_1 = L_3 \quad L_2 = L_4$

$$A \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ l_3 - l_1 \\ l_4 - l_2 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} l_1 + l_2$$

$$\begin{cases} x + 4z = 0 \\ y - t = 0 \\ z = z \\ t = t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -4z \\ y = t \\ z = z \\ t = t \end{cases}$$

$(x, y, z, t) \in \operatorname{Ker} f$ est de la forme $(-4z, t, z, t)$

$$\operatorname{Ker} f = \{(-4z, t, z, t), (z,t) \in \mathbb{R}^2\}$$

c) Donner une base de Ker f

$(-4z, t, z, t) = z(-4, 0, 1, 0) + t(0, 1, 0, 1)$
$= z v_1 + t v_2$

$\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ et $\dim \operatorname{Ker} f = 2$

Image d'une app lin $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$

Déf Soit $f : E \to F$

$\operatorname{Im} f = \{ f(x) \mid x \in E \}$

Im f est l'ensemble des $y \in F$ qui vérifient la propriété suivante :

$y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$

"Le sous ensemble de F formé des élements qui ont un antécédent ds E par f"

ACT Montrer que Im f est un sous ev de F.

Vérifions :

1)∘ $0 \in \operatorname{Im} f$

2)∘ Si y_1 et y_2 sont ds Im f alors $\alpha y_1 + \beta y_2 \in \operatorname{Im} f$

1)∘ $f(0_E) = 0_F$ donc $0_F \in \operatorname{Im} f$

2)∘ $y_1 = f(x_1)$ $y_2 = f(x_2)$, $\alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$

$\alpha y_1 + \beta y_2 = f(\alpha x_1) + f(\beta x_2) = f(\alpha x_1 + \beta x_2)$

$(x_1, x_2) \in E^2$ donc $\alpha x_1 + \beta x_2 \in E$ (puisque E est un espace vectoriel), et $\alpha x_1 + \beta x_2$ est antécédent de $\alpha y_1 + \beta y_2$ d'où $\alpha y_1 + \beta y_2 \in \operatorname{Im} f$

Propositº Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ avec $(\mathcal{E}_1 \dots \mathcal{E}_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$ et $(e_1, e_2, \dots e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$

Im f est engendré par la famille $(f(\mathcal{E}_1), f(\mathcal{E}_2) \dots f(\mathcal{E}_p))$

Ce qui se note aussi $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{vect}(f(\mathcal{E}_1), f(\mathcal{E}_2) \dots f(\mathcal{E}_p))$

ACT Soit $v = f(u)$ un vecteur de Im f

$u = \alpha_1 \mathcal{E}_1 + \alpha_2 \mathcal{E}_2 \dots + \alpha_p \mathcal{E}_p$ $\qquad u = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix}$

Montrer $\operatorname{Im} f = \operatorname{vect}(f(\mathcal{E}_1), \dots f(\mathcal{E}_p))$

$v = f(\alpha_1 \mathcal{E}_1 + \alpha_2 \mathcal{E}_2 \dots + \alpha_p \mathcal{E}_p)$, f est linéaire donc :

$v = f(\alpha_1 \mathcal{E}_1) + f(\alpha_2 \mathcal{E}_2) \dots + f(\alpha_p \mathcal{E}_p) = \alpha_1 f(\mathcal{E}_1) = \alpha_2 f(\mathcal{E}_2) \dots + \alpha_p f(\mathcal{E}_p)$

Soit v élement de vect $(f(\mathcal{E}_1), f(\mathcal{E}_2) \dots f(\mathcal{E}_p))$

Exo Soit f_A de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

a) Quelle est l'Image de f_A donnez-en une base ?

$f(\mathcal{E}_1) = f(\mathcal{E}_2) = f(\mathcal{E}_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\operatorname{Im} f = \operatorname{vect} \cancel{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \operatorname{vect} f(\mathcal{E}_1)$

$= \operatorname{vect}(1, 1, 1)$

$= \operatorname{vect}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3)$

Exo même questⁿ pour $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$

$\mathcal{B} = \{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3, \mathcal{E}_4\}$ de matrice $\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ f(\mathcal{E}_1) \; f(\mathcal{E}_2) \; f(\mathcal{E}_3) \; f(\mathcal{E}_4) \end{array}$

On veut une base de $\operatorname{Im} f$

$\operatorname{Im} f = \operatorname{vect}(f(\mathcal{E}_1), f(\mathcal{E}_2) \dots f(\mathcal{E}_4))$

$\operatorname{Im} f = \operatorname{vect} f(\mathcal{E}_1), f(\mathcal{E}_2)$

$f(\mathcal{E}_1) = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_3 \quad f(\mathcal{E}_2) = -\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_4$

$\mathcal{B}_{\operatorname{Im} f} = \{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_3, -\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_4\}$

$= \{(1, 0, 1, 0), (-1, 1, -1, 1)\}$

Rang d'une app lin

Def Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ une app lin on appelle rang de f et on note $\operatorname{rg} f$ la dimension de $\operatorname{Im} f$.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ la matrice standard de f $\operatorname{rg} f$ est égal à :

* la dimension du SEV engendré par les colonnes de A.
* le nbr de 1 directeurs dans la matrice échelonnée équivalente à A.

Théorème du rang (2ᵉ gros th)

Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ une app lin

Alors l'on a $\underbrace{\operatorname{rg} f}_{1 \text{ directeurs}} + \underbrace{\dim \operatorname{Ker} f}_{\text{variable libre}} = p$

Interprétation matricielle

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ pour résoudre $AX = 0$ on a échelonné puis réduit

$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} & & \text{libre} & \text{libre} \end{array} \\ A_n^m & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & p \end{array}$

Exo

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et f_A

a) Déterminer $\operatorname{Ker} f_A$
b) En déduire $\operatorname{rg} f_A$ avec le théorème
c) Donner une base de $\operatorname{Im} f_A$

a) $A \sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \;\; x \;\; y \;\; z \;\; t \end{array}$

Système $AX = 0$

$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ t = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2y - z \\ t = 0 \end{cases}$

$\operatorname{Ker} f_A = \{(2y - z, y, z, 0), (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$

Rm le rang se voyait sur la matrice de départ

$\begin{array}{c} \operatorname{rg} 1 \\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$ Base de $\operatorname{Im} f_A = \{(1,1,1,0), (0,0,0,1)\}$

exemple de rang

$\operatorname{rg} 1 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3/2 \\ 1 & -2 & 3/2 \\ 1 & -2 & 3/2 \end{pmatrix}$ $\operatorname{rg} 2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & -3 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

Exo Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} l_3 - l_1$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} l_4 + l_1$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} l_2 - l_3 \\ \\ l_4 - l_2 \end{matrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} l_1 - l_3 \\ l_2 - l_3 \end{matrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -t \\ t = t \end{cases}$ $\operatorname{Ker} f_A = \{(t, t, -t, t), t \in \mathbb{R}\}$

Base du noyau $= \{(1, 1, -1, 1)\}$

Notation $\dim \operatorname{Ker}(f_A) = \operatorname{Null}(f) = 1$

D'après le th du rang : $\operatorname{rg} f + 1 = 4 \iff \operatorname{rg} f = 3$

Comment choisir 3 colonnes de A, pour avoir une base de $\operatorname{Im} f$?

À savoir : une famille de p vecteurs engendre un ss espace vectoriel de dimension p ssi elle est LIBRE

Considérons la ss-famille formée des 3 premiers vecteurs de

$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ la ss-famille est libre

Les 3 premiers vecteurs de A forment une base de $\operatorname{Im} f$

Exprimons les en fct des vecteurs de la base canonique $\mathbb{R}^4$ $\mathcal{B} = \{e_1 + e_3 - e_4, e_2 + e_3 + e_4, e_1 + e_2 + 2e_3 + e_4\}$

Exo Surjectivité et systèmes non homogène

Soit f $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Resoudre $AX = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et conclure sur la surjectivité de f -

b) Utiliser a) pour résoudre $AX = 0$

c) Utiliser a) pour résoudre $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) Quel résultat fondamental sur les systèmes linéaires retrouve t on ?

a) Mat augmentée $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & 0 & b \\ 1 & -1 & 1 & 0 & c \end{array}\right) = M$

$$M \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & -1 & c-a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & a+b \\ 0 & 1 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -(c-a) \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & b+c \\ 0 & 1 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a-c \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x = b+c-2z \\ y = b-z \\ z = z \\ t = a-c \end{cases}$$

f est surjective et le système a une ∞ de solution S

$S = \{(b+c-2z, b-z, z, a-c), z \in \mathbb{R}\}$

$\operatorname{Ker} f = \{(-2z, -z, z, 0), z \in \mathbb{R}\}$

Antécédents de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \{(1-2z, -z, z, 0), z \in \mathbb{R}\}$

$(1-2z, -z, z, 0) = (1, 0, 0, 0) + (-2z, -z, z, 0)$

Antécédents de $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \{(2-2z, 1-z, z, 0), z \in \mathbb{R}\}$

$(2-2z, 1-z, z, 0) = (2, 1, 0, 0) + (-2z, -z, z, 0)$

Resultat fondamental si E_H désigne l'espace solution du système $AX = 0$ et que X_0 vérifie $AX_0 = Y_0$ l'ensemble solution de $AX = Y_0$ est $X_0 + E_H$

Exo Soit $\mathbb{R}^4$ l'ensemble $E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 0\}$

Montrer ss calcule que E est un SEV de $\mathbb{R}^4$.

$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, x_3, x_4) \to x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4$

de matrice $(1 \ 2 \ 1 \ 4)$ $E = \text{Ker} f$ de est un SEV de $\mathbb{R}^4$

Exo On considère $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ de matrice standard $(1 \ 2 \ 1 \ 4)$

1) Donner une base de Ker f (On écrira les vecteurs de la base en fct° de $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3, \mathcal{E}_4$)

x directeur $y \, z \, t$ libres.

$x = -2y - 1z - 4t \qquad (-2y - 1z - 4t, y, z, t)$

$= y(-2, 1, 0, 0) + z(-1, 0, 1, 0) + t(-4, 0, 0, 1)$

$y v_1 + z v_2 + t v_3$

$\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ $\dim \text{Ker} f = 3$.

$\text{Ker} f = \{(-2y - z - 4t, y, z, t), (y, z, t) \in \mathbb{R}^3\}$

Une base de Ker f :

$v_1 = (-2, 1, 0, 0)$ $v_2 = (-1, 0, 1, 0)$ $v_3 = (-4, 0, 0, 1)$

$$\mathcal{B} = \{\underbrace{-2\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}_{v_1}, \underbrace{-\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_3}_{v_2}, \underbrace{-4\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_4}_{v_3}\}$$

Exo a) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Soit $F = \{x \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid Ax = 0\}$ Montrer (sans calcul) que F est un SEV de $\mathbb{R}^3$. Donnez une base

b) $\hat{=}$ quest° pour $G = \{M \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R}) \mid AM = 0\}$

Pour la base on utilisera les résultats de a)

$F = \text{Ker} f_A$

$f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $x \to Ax$

Puisque $F = \text{Ker} f$, c'est un SEV.

Base de F, il faut résoudre $Ax = 0$ $\quad x = (x_1, x_2, x_3)$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{l_2 - l_1 \\ l_3 + l_2}}{\overset{l_1/2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{l_1 + l_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$ $(0, x_3, x_3) = x_3 (0, 1, 1)$ d'où $\mathcal{B} = \{\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3\}$

b) Indice : Bien def une app lin et verif qu'elle est est linéaire

$f : \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, $M \longmapsto AM$

puisque $G = \operatorname{Ker} f_G$, c'est un sev de $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$

Soient α et β ds $\mathbb{R}$ et N, P ds $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ $A(\alpha N + \beta P) = \alpha AN + \beta AP$

donc f est linéaire $(f(\alpha N + \beta P)) = (\alpha f(N) + \beta f(P))$

Résoudre $AM = 0$ ds $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$

$AM = 0 \iff AM = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$AM = A(X\ Y) = (AX\ \ AY)$ si AM est nulle on a $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $AY = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

on a résolu au a)

$AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff X, x(0, 1, 1)$ et $AY = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff Y = y(0, 1, 1)$

$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & \\ x & y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, il est clair que $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

ssi $x = y = 0$ donc $\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de G.

Espace Vectoriel de matrice

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

EXO POSSIBLE AU DE

a) Calculer B^2 et B^3

b) Montrer grâce a un système linéaire (mais ss calcul) que la famille I, B, B^2, B^3 est liÉ

c) Montrer que I, B, B^2 est libre

d) Montrer par récurrence que I, B, B^2 est une base SEV (de $M_{3,3}(\mathbb{R})$) $F = \operatorname{vect}(I, B, B^2, \dots B^p)$

→ Vr

$B^2 \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ $\quad B^3 = B^2 \times B \quad \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&3&3\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$

b) Si I, B, B^2, B^3 est libre $xI + yB + zB^2 + tB^3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

$\Rightarrow x = y = z = t = 0 \quad \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ y + 2z + 3t = 0 \\ z + 3t = 0 \end{cases}$

Les coef L_1C_2 et L_2C_3 sont égaux

Matrice augmentée du système homogène

$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&0&1&3\end{pmatrix}$ Elle est échelonnée
3 var directeurs, 1 var libre.

1 var libre $\Rightarrow$ une infinité de solution
On n'a pas $x = y = z = t = 0$

c) Le m raisonnement donne

$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$ 3 var directeur solution unique $x = y = z = 0$

d)

$M \sim \begin{pmatrix}1&0&-1&-2\\0&1&2&3\\0&0&1&3\end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 - L_2 \\ \sim \end{matrix} \begin{pmatrix}1&0&-1&-2\\0&1&1&0\\0&0&1&3\end{pmatrix} L_2 - L_3 \quad \begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&0&1&3\end{pmatrix} L_1 + L_3$

$L_2 - L_3 \begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-3\\0&0&1&3\end{pmatrix}$ forme des solutions $(-t, 3t, -3t, t)$ $t \in \mathbb{R}$

On a résolu $xI + yB + zB^2 + tB^3 = 0$

$t = 1$ donne $-I + 3B - 3B^2 + B^3 = 0$

$B^3 = I - 3B + 3B^2$

e) Utiliser l'expression de B^3 en fct° de I, B, B^2 en utilisant b)

On sait déjà que I, B, B^2 est libre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

On note $G = \text{vect}(I, B, B^2)$

$HR(0) = B^0 \in \text{vect}(I, B, B^2)$
$HR(k)$: $B^k = \alpha I + \beta B + \gamma B^2$
$HR(k) \Rightarrow HR(k+1)$: $B^{k+1} = \alpha B + \beta B^2 + \gamma B^3$ or $B^3 \in G$

De $B^{k+1} \in \text{vect}(I, B, B^2)$ soit $HR(k+1)$.

Soit T_3^+ l'ensemble des matrices 3×3 triangulaire sup.

- dire pquoi T_3^+ est un SEV de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
- quel est sa dimension? ~~dim~~

$O \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})\ T_3^+$, la combinaison de 2 triangulaire sup est triangulaire sup.

$\text{Dim } T_3^+ = 9 - 3 = 6$

Changement de Base

ACT

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère la base standard $S = (\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3, \mathcal{E}_4)$

a) Montrer avec un déterminant que $t_1 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$, $t_2 = \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3$, $t_3 = \mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_4$, $t_4 = \mathcal{E}_1$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

b) On note $T = (t_1, t_2, t_3, t_4)$ la nouvelle base

Soit v un vecteur de $\mathbb{R}^4$ on note $(x_1, \ldots x_4)$ ses coordonnées dans S et $(X_1, \ldots X_4)$ ses coordonnées dans T.

Montrer que $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix}$ idée revenir à la def des coordonnées ds une base.

a) $\begin{array}{c} \begin{matrix} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \neq 0$ t_1, t_2, t_3, t_4 est une base de $\mathbb{R}^4$ ssi

On dévelappe / C_4 $(-1)^{4+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

$T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ est de une base de $\mathbb{R}^4$

b) $v = X_1 t_1 + X_2 t_2 + X_3 t_3 + X_4 t_4$

$v = x_1 \mathcal{E}_1 + x_2 \mathcal{E}_2 + x_3 \mathcal{E}_3 + x_4 \mathcal{E}_4$

En écrivant $v = v$ en colonne :

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = X_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + X_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + X_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + X_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ soit ss forme de produit $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix}$

Théorème coordonnés et matrice de passage -

Soit V un espace vectoriel et une base (l'ancienne) $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e_1', e_2', \dots e_n')$ une autre base (la nouvelle)

Si un vecteur a pour coordonnées $(x_1, x_2, \dots x_n)$ ds $\mathcal{B}$ et $(x_1', x_2' \dots x_n')$ ds $\mathcal{B}'$. On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et on note $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ la matrice formée des vecteurs colonnes de $\mathcal{B}'$ écrits ds $\mathcal{B}$.

On a la relat° suivante :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Exo Soit $E = \mathbb{R}^4$ et $\mathcal{B} = (\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3, \mathcal{E}_4)$

a) Soit $\omega_1 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3$; $\omega_2 = \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_4$; $\omega_3 = \mathcal{E}_1$; $\omega_4 = \mathcal{E}_2$

Montrer $\mathcal{B}' = (\omega_1, \dots \omega_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$

$$|\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

b) Soit $v = \omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4$, quelles sont :
- ses coordonnées ds $\mathcal{B}'$?
- ses coordonnées ds $\mathcal{B}$?

c) Soit $t = 2\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_4$ quelles sont les coordonnées ds $\mathcal{B}$?

d) De quoi a t on besoin pr calculer les coordonnées ds $\mathcal{B}'$?

$$v_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{App } \underline{\text{th}} \quad v_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} v_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

c) $t_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}^{-1} = P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad t_{\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ex : $E = \mathbb{R}^4$ $B = (\varepsilon_1 \dots \varepsilon_4)$

a) $\omega_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, $\omega_2 = \varepsilon_3 + \varepsilon_4$, $\omega_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_3$, $\omega_4 = \varepsilon_2 + \varepsilon_4$

Les familles $\omega_1, \dots \omega_4$ forment-elles une base de $\mathbb{R}^4$?

$l_2 - l_1$ et $l_3 - l_4$ donnent :

vecteur opposé → famille liée

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

b) On admet que $z_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, $z_2 = \varepsilon_3 + \varepsilon_4$, $z_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_3$, $z_4 = \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4$ est une base B'

Soit $v = z_1 + z_2 + z_3 + z_4$

- coordonnées ds B' ? $v_{B'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- coordonnées ds B ? $v_B = P_{BB'} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$v_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

c) Soit $t = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4$

coordonnées dans B

Soit $P_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ coordonnées ds B' ?

$$t_{B'} = P_{B'B} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Matrice $P_{BB'}$ et App lin

Soit V de base $B = (e_1 \dots e_n)$ et $f_A : V \to V$ de matrice

On a $f : x \to y$

Soit $B' = (e_1' \dots e_n')$, on note X et X' les représentants de x ds les bases B et B' - Même classe pour Y, Y' et y

On a $X = P_{BB'} X'$ $Y = P_{BB'} Y'$

$Y' = P_{BB'}^{-1} Y = P_{BB'}^{-1} AX = P_{BB'}^{-1} A P_{BB'} X'$

$Y' = P_{BB'}^{-1} A P_{BB'} X'$

Pr les matrices on peut noter le résultat de la façon suivante : $Mat_{B'}(f) = P_{BB'} \, Mat_B(f) P_{BB'}$

Algb

Ex : $E = \mathbb{R}^4$ $\quad B = (\varepsilon_1 \dots \varepsilon_4)$

a) $w_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, $w_2 = \varepsilon_3 + \varepsilon_4$, $w_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_3$ $\quad w_4 = \varepsilon_2 + \varepsilon_4$

Les familles $w_1, \dots w_4$ forment-elles une base de $\mathbb{R}^4$?

$l_2 - l_1$ et $l_3 - l_4$ donnent :

vecteur opposé → famille liée

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

b) On admet que $z_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, $z_2 = \varepsilon_3 + \varepsilon_4$, $z_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_3$, $z_4 = \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4$ est une base B'

Soit $v = z_1 + z_2 + z_3 + z_4$

- coordonnées ds B' ? $\quad v_{B'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- coordonnées ds B ? $\quad v_B = P_{BB'} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$v_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

c) Soit $t = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4$

coordonnées dans B

Soit $P_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ coordonnées ds B' ?

$$t_{B'} = P_{B'B} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Matrice $P_{BB'}$ et App lin

Soit V de base $B = (e_1 \dots e_n)$ et $f_A : V \to V$ de matrice

On a $f : x \to y$

Soit $B' = (e_1' \dots e_n')$ on note X et X' les représentants de x ds les bases B et B' - Même classe pour Y, Y' et y

On a $X = P_{BB'} X'$ $\quad Y = P_{BB'} Y'$

$Y' = P_{BB'}^{-1} Y = P_{BB'}^{-1} AX = P_{BB'}^{-1} A P_{BB'} X'$

$Y' = P_{BB'}^{-1} A P_{BB'} X'$

Pr les matrices on peut noter le résultat de la façon suivante : $\quad Mat_{B'}(f) = P_{BB'} \; Mat_B(f) P_{BB'}$

Exo On considère la famille $e_1 = 1$ $e_2 = -1 + x$ $e_3 = (x+1)^2$ Algb

Montrer que e_1, e_2, e_3 est une base de $\mathbb{R}_2[X]$

(Base canonique $\mathbb{R}_2[X]$: $\mathcal{E}_1 = 1$, $\mathcal{E}_2 = x$, $\mathcal{E}_3 = x^2$)

$$\begin{array}{c c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \mathcal{E}_1 \\ \mathcal{E}_2 \\ \mathcal{E}_3 \end{array} \end{array} \qquad \det P = 1$$

Exo (Style TAI)

Soit $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}[x]$ défini par $f(P) = 2(x+1)P - (x^2 - 2x + 1)P'$

1) Montrer que f est linéaire

2) Montrer que $f(P) \in \mathbb{R}_2[x]$

1) Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et P et Q ds $\mathbb{R}^2[x]$

$f(\lambda P + \mu Q) = 2(x+1)(\lambda P + \mu Q) - (x-1)^2 (\lambda P' + \mu Q')$

$f(\lambda P + \mu Q) = \lambda(2(x+1)P - (x+1)^2 P') + \mu(2(x+1)Q - (x-1)^2 Q')$

$f(\lambda P + \mu Q) = \lambda f(P) + \mu f(Q)$ f est linéaire

2) $P(x) = ax^2 + bx + c$

$f(P) = 2(x+1)(ax^2 + bx + c) - (x^2 - 2x + 1)(2ax + b)$

On veut le coef de x^3 : $2a - 2a$, $f(P) \in \mathbb{R}[x]$

On admet que $f(P) = (6a + b)x^2 + (-2a + 4b + 2c)x + (-b + 2c)$

Calculer $f(\mathcal{E}_1)$ $f(\mathcal{E}_2)$ $f(\mathcal{E}_3)$

$f(\mathcal{E}_1)$: $c = 1$; $b = 0$; $a = 0$, $f(1) = 2x + 2$
$f(\mathcal{E}_2)$: $c = 0$; $b = 1$; $a = 0$ $f(x) = 1x^2 + 4x - 1$
$f(\mathcal{E}_3)$: $c = 0$; $b = 0$; $a = 1$ $f(x^2) = 6x^2 - 2x$

$$A = \begin{array}{c c} \begin{array}{ccc} f(\mathcal{E}_1) & f(\mathcal{E}_2) & f(\mathcal{E}_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \mathcal{E}_1 \\ \mathcal{E}_2 \\ \mathcal{E}_3 \end{array} \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} L_2 - L_1 \\ \begin{pmatrix} 2 & \cancel{-1} & 0 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\det A = 2 \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 2 \times 32 = 64$$

Diagonalisation

Def Vecteurs propres et valeurs propres d'une matrice carré

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on dit qu'un vecteur V est un vecteur propre pour A lorsque : $V \neq 0$ et $\exists \lambda \in \mathbb{R} : AV = \lambda V$

On dit que λ est une valeur propre de A et que V est un vecteur propre associé à λ.

Exp $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Vérifier que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont vecteurs propres de A et déterminer les valeurs propres auxquelles ils sont associés.

$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2+2 \\ 2+2+2 \\ 2+2+2 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \lambda = 6$

$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\qquad \lambda = 0$

$A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Def Polynome caractéristique

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on appelle polynôme caractéristique de A le polynome $P(x) = \det(xI - A)$ (ou $-\det(A - xI)$)

Il est de degré n son terme dominant est x^n (resp $(-1)^n x^n$) son terme constant est $(-1)^n \det A$.

Exo Donner la forme factorisée de $\det(x - IA)$ où $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$\det(xI - A) = -\det(A - xI)$

$\det(A - xI) = \begin{vmatrix} 2-x & 2 & 2 \\ 2 & 2-x & 2 \\ 2 & 2 & 2-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-x & 2 & 2 \\ 0 & -x & x \\ 2 & 2 & 2-x \end{vmatrix} \; l_2 - l_3$

$\det(A - xI) = \begin{vmatrix} 2-x & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2-x \end{vmatrix}$ on dev / l_2

$x \left(- \begin{vmatrix} 2-x & 2 \\ 2 & 2-x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2-x & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \right) = x \left(((x-2)^2 - 4) - (2(2-x) - 4) \right)$

$$\det(A - xI) = x\left(-(x^2 - 4x) - 2(2 - x - 2)\right)$$
$$= x(-x^2 + 4x + 2x)$$
$$= x(-x^2 + 6x) = -x^2(x - 6)$$

[illegible]

Théorème valeurs propres & polynôme caractéristique

Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme $\det(A - xI)$ (ou $\det(xI - A)$).

Exo Soit $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$

a) Calculer $\det(xI - B)$ et factoriser sachant que 1 est racine

$$\det(xI - B) = \begin{pmatrix} x-3 & -2 & 2 \\ 1 & x & -1 \\ -1 & 1 & x-6 \end{pmatrix} \overset{C_3 + C_2}{=} \begin{pmatrix} x-3 & -2 & 0 \\ 1 & x & x-1 \\ -1 & 1 & x-5 \end{pmatrix}$$

$$(xI - B) = (x-3)\begin{vmatrix} x & x-1 \\ 1 & x-5 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & x-1 \\ -1 & x-5 \end{vmatrix}$$
$$= (x-3)(x^2 - 6x + 1) + 2(2x - 6)$$
$$= (x-3)(x^2 - 6x + 1) + 4(x - 3)$$
$$= (x-3)(x^2 - 6x + 5)$$

l'énoncé donne 1 racine d'où $|xI - B| = (x-3)(x-1)(x-5)$

les valeurs propres sont $Spe(A) = \{1, 3, 5\}$

Def Sous espace propre

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et λ une valeur propre de A

On appelle ss esp propre associé à λ l'ensemble $Ker(\lambda I - A)$

Exp $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $P_N(x) = \begin{pmatrix} 1-x & -1 & 0 \\ -1 & 1-x & 1 \\ 0 & 0 & 3-x \end{pmatrix} = (3-x)\begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ -1 & 1-x \end{pmatrix}$

$$P_N(x) = -(x-3)\left((x-1)^2 - 1\right) = -(x-3)(x-2)x$$

$Spe(N) = \{0, 2, 3\}$

Déterminant de $E_0 = Ker(N - 0I) = Ker\, N$

E_0 : $N \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \underset{L_3 - L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ x, z directrice, y est libre

$\begin{cases} x = y \\ y = y \\ z = 0 \end{cases}$ $\quad Ker\, N = E_0 = vect((1,1,0))$

Donner une base de $E_3 = Ker(N - 3I)$

$N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad P_N(3) = \begin{pmatrix} 1-3 & -1 & 0 \\ -1 & 1-3 & 1 \\ 0 & 0 & 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$N - 3I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{3} z \\ y = \frac{2}{3} z \\ z = z \end{cases} \quad (x,y,z) = z\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)$

On multiplie par 3

$E_3 = vect((-1, 2, 3))$

Pour E_2 on trouve $vect((-1,1,0))$ On remarque

Rmq $\dim E_0 + \dim E_2 + \dim E_3 = 3 = n$

CNS de diagonalisabilité

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et λ une de ses valeurs propres A est diagonalisable ssi $\sum_{\lambda \in Sp(A)} E_\lambda = n$. on remq $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Lorsque la matrice est diagonalisable, les vecteurs propres forme une base de $\mathbb{R}^n$.

Ici la famille $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$

On le vérifie facilement

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$

Si B' est la base des vecteurs propres

$P_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ on admet $P_{BB'}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

On a vu l'autre jour la formule de changement de base pr un app de $\mathbb{R}^n$ ds $\mathbb{R}^n$.

Si $\tilde{A}$ est la matrice de la nouvelle base

Etant donné que la matrice d'une app est donnée par l'image des vecteurs de base.

Si on pose $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ la matrice $\tilde{A}$

$$\begin{array}{cc} \begin{matrix} f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix} \end{array} = \tilde{A}$$

App : calculer A^n grâce à $\tilde{A} = D$ la matrice diagonale ds la base de vecteurs propres.

Il est clair que $A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

Puisque $D = P_{BB'}^{-1} \, A P_{BB'}$, une récurrence facile donne $D^n = P^{-1} A^n P$; $HR(0)$; $D^0 = I = P^{-1}P$ Vrai

$HR(n)$; $D^n = P^{-1} A^n P$

$HR(n) \Rightarrow HR(n+1)$; $D^{n+1} = D^n P^{-1} A P \Leftrightarrow D^{n+1} = P^{-1} A^n P P^{-1} A P$

D'où $D^{n+1} = P^{-1} A^{n+1} P$ soit $HR(n+1)$

$D^n = P^{-1} A^n P$ permet de calculer $A^n = P D^n P^{-1}$

Exo $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $Spe(A) = \{1, 2\}$ Vecteurs propres

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $P_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $P_{BB'}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

1) Calculer $A^n = P D^n P^{-1}$

$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$

$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 4^n \\ 1 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = ($ [illegible]

$= \begin{pmatrix} -1 + 2^{n+1} & 2 - 2^{n+1} \\ -1 + 2^n & 2 - 2^n \end{pmatrix}$

<u>Exo</u> Diago type recap

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \qquad |A - xI| = -x(x-6)(x+4)$$

$E_0 = \text{vect}((0,-1,1))$

$E_6 = \text{vect}((1,0,1))$

$\dim E_0 + \dim E_6 + \dim E_4 = 3$ A est diagonalisable

$$P_{BB'} = \begin{array}{c} \begin{matrix} E_0 & E_6 & E_{-4} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$P_{BB'}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D^n P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6^n & 6^n & 6^n \\ (-4)^n & (-4)^n & (-4)^n \end{pmatrix}$$

$$D^n P^{-1} P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6^n + (-4^n) & 6^n - (-4^n) & 6^n (4^n) \\ -(-4^n) & (-4^n) & (-4^n) \\ 6^n & 6^n & 6^n \end{pmatrix}$$