MAHEL Jérémy

CONTRÔLE ECRIT DE RATTRAPAGE – FONCTIONS ET VARIATIONS

La calculatrice est interdite.

Seul le formulaire fourni en annexe du sujet est autorisé.

EXERCICE N°1 :

Étudier les branches infinies de la fonction f définie par : $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}} \sin\frac{3}{x}$. au voisinage de $+\infty$ (limite, asymptote éventuelle, position relative).

EXERCICE N°2 :

Montrer que la série de terme général (u_n) suivante est convergente et calculer sa somme :

$$u_n = \frac{1}{n(n-2)}$$

EXERCICE N° 3 :

Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^5 - 7}{n^2 + 2} z^n$
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{16^n z^{2n+1}}{n!}$

EXERCICE N°4 :

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^{\pi} (3x+1)\sin x dx$
2. $\int_3^{15} (2t-1)\sqrt{t+1}dt$ (on pourra effectuer un changement de variable)

EXERCICE N°5 :

Déterminer les rayons de convergence et les sommes des séries entières suivantes :

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} (3n^2 - 5n + 3)x^n$
2. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{16^n z^{2n+1}}{n!}$

L1 Groupe E

DE RATTRAPAGE

Fonction et Variation.

Validé

Exercice n°1

$f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}} \sin \frac{3}{x}$

on pose $X = \frac{1}{x}$

si $x \to +\infty$ $X \to 0$

$e^X = 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + o(X^3)$

$e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$

on pose $X = \frac{3}{x}$

Si $x \to +\infty \to X \to 0$

$\sin X = X - \frac{X^3}{3!} + o(X^3)$

$\sin \frac{3}{x} = \frac{3}{x} - \frac{27}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$

$e^{\frac{1}{x}} \sin \frac{3}{x} = \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\left(\frac{3}{x} - \frac{27}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)$

$= \frac{3}{x} - \frac{27}{6x^3} + \frac{3}{x^2} - \frac{27}{6x^4} + \frac{3}{2x^3} + \frac{3}{6x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$

$= \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{3}{2x^3} - \frac{24}{6x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$

$= \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{3}{2x^3} - \frac{4}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$

$x^2 e^{\frac{1}{x}} \sin \frac{3}{x} = x^2\left(\frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{3}{2x^3} - \frac{4}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right)$

$= 3x + 3 - \frac{3}{2x} - \frac{4}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

Exercice n°2

$U_n = \frac{1}{n(n-2)}$

$\frac{1}{n(n-2)} = \frac{1}{n^2-2n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$

$2>1$ Donc d'après la Règle de Rieman la STG U_n est convergente.

On Décompose en éléments simple.

$\frac{1}{n(n-2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n-2}$

$\frac{1}{n-2} = A + \frac{Bn}{n-2}$ pour $n=0$

$\frac{1}{-2} = A$ Donc $A = -\frac{1}{2}$

$\frac{1}{n} = \frac{A(n-2)}{n} + B$ pour $n=2$

$\frac{1}{2} = B$

On obtient donc

$U_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n}\right)$

On peut donc écrire

$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} -\frac{1}{k} + \frac{1}{k-2}$

$= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} -\frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k-2}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k-2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=3}^{n-2} \frac{1}{k'} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)$ $k' = k-2$

$= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=3}^{n-2} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=3}^{n-2} \frac{1}{k} - \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} + 1 + \frac{1}{2}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-2} - \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} + 1 + \frac{1}{2}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\underbrace{\left(\frac{1-1}{}\right)}_{0} \left(\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k}\right) + \left(-\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-2} - 1 - \frac{1}{2}\right)\right)$

$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-2} - 1 - \frac{1}{2}\right)$

$\lim_{n \to +\infty} S_n = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}$

Ainsi: $\lim_{n \to +\infty} U_n = \frac{1}{n(n-2)} = -\frac{3}{4}$

Exercice n°3

1-) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3 - 7}{n^2+2} z^n$ est de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$

où $a_n = \frac{n^3 - 7}{n^2+2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^3}{n^2} \underset{+\infty}{\sim} n^3$

$a_{n+1} = (n+1)^3 \underset{+\infty}{\sim} n^3$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^3}{n^3}$

$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ donc $R = 1$.

2-) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{16^n}{n!} z^{2n+1}$

$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{16^n}{n!} z^{2n} \times z$

$= z \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{16^n}{n!} z^{2n}$ On pose $Z = z^2$

$= z \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{16^n}{n!} Z^n$ est de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n Z^n$

où $a_n = \frac{16^n}{n!}$

$a_{n+1} = \frac{16^{n+1}}{(n+1)!}$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{16^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{16^n} = \frac{16^n \times 16}{n!(n+1)} \times \frac{n!}{16^n} = \frac{16}{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{16}{n}$

L'équation de la droite $\Delta = 3x+3$ est asymptote à C_f en $+\infty$.

$\lim_{x \to +\infty} x^2 e^{\frac{1}{x}} \sin\frac{3}{x} = 3$

$-\frac{3}{2x} < 0$ quand $x > 0$ donc la droite d'équation Δ est au dessus de C_f.

Exercice n°4

1-) $\int_0^{\pi} (3x+1)\sin x \, dx$

$u(x) = 3x+1 \qquad u'(x) = 3$

$v'(x) = \sin x \qquad v(x) = -\cos x$

$= [-\cos x \times (3x+1)]_0^{\pi} + 3\int_0^{\pi} \cos x$

$= [-\cos x \times (3x+1)]_0^{\pi} + 3[\sin x]_0^{\pi}$

$= \left((3\pi+1)\times 1 - (\cancel{0}\,1)\right) + 3(0-0)$

$= 3\pi + 1$

$\int_0^{\pi} (3x+1)\sin x \, dx = 3\pi + \cancel{1}$

2-) $\int_3^{15} (2t-1)\sqrt{t+1} \, dt$

On pose $x = \sqrt{t+1}$

$x = \sqrt{t+1} \qquad \frac{dt}{dx} = 2x$ donc $dt = 2x\,dx$

$x^2 = t+1$

$t = x^2 - 1$

quand $t = 15$, $x = 4$

$t = 3$, $x = 2$

$\int_2^4 \left(2(x^2-1)-1\right) \times x \, 2x \, dx = 2\int_2^4 (2x^2-2-1)\times x^2 \, dx$

$= 2\int_2^4 (2x^2-3)\times x^2 dx = 2\int_2^4 2x^4 - 3x^2 \, dx$

$= 2\left[\frac{2x^5}{5} - x^3\right]_2^4 = 2\left(\left(\frac{2\times(4)^5}{5} - (4)^3\right) - \left(\frac{2\times(2)^5}{5} - 8\right)\right)$

PINHEL Jérémy 20/04/09

L1 Groupe E

Exercice n°3 (Suite...)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{16}{n} = 0 \quad \text{donc } R_2 = +\infty, \ R_3 = +\infty$$

Exercice n°5

1-) $\sum_{n=0}^{+\infty} (3n^2 - 5n + 3)x^n$ est de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

où $a_n = 3n^2 - 5n + 3 \underset{+\infty}{\sim} 3n^2$

$a_{n+1} = 3(n+1)^2 \underset{+\infty}{\sim} 3n^2$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ donc $R = 1$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (3n^2 - 5n + 3)x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (3n(n-1) + 3 - 2n)x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} 3n(n-1)x^n + 3\sum_{n=0}^{+\infty} x^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} nx^{n-1} \times x$$

$$= 3\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^n + 3\left(\frac{1}{1-x}\right) - 2x\sum_{n=0}^{+\infty} nx^{n-1}$$

$$= 3\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} \times x^2 + 3\left(\frac{1}{1-x}\right) - 2x\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)$$

$$= 3x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} + \frac{3}{1-x} - \frac{2x}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{6x^2}{(1-x)^3} + \frac{3}{(1-x)} - \frac{2x}{(1-x)^2}$$

2-) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{16^n z^{n+1}}{n!}$

$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{16^n}{n!} z^{2n} \times z$

$= z \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{16^n}{n!} z^{2n}$ on pose $Z = z^2$

$= z \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{16^n}{n!} Z^n$ * est de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n Z^n$

où $a_n = \frac{16^n}{n!}$

Voir exercice 3

$a_{n+1} = \frac{16^{n+1}}{(n+1)!}$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{16^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{16^n} = \frac{16}{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{16}{n}$

$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$ donc $R_Z = +\infty$

$R_z = +\infty$

$* z \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{16^n}{n!} Z^n = z \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{16 (Z)^n}{n!}$

$= 16z \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{Z^n}{n!}$

$= 16z \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{Z^n}{n!} - 1$

$= 16z \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{Z^n}{n!} - 1$

$= 16z \left(e^Z - 1\right)$

$= 16z \left(e^z - 1\right)$