CONTRÔLE ÉCRIT n°1 Eléments de correction

EXERCICE N°1 : (3 points)

Voir cours

EXERCICE N°2 :(2 points)

Voir cours

EXERCICE N°3 : (2 points)

$Posons\ X = \frac{2x+1}{x^2-1}.X \approx \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}\ en +\infty\ donc\ X\ \to 0\ quand\ x \to +\infty. \tan X \approx X\ en\ 0\ donc\ \tan\left(\frac{2x+1}{x^2-1}\right) \approx \frac{2x+1}{x^2-1} \approx \frac{2}{x}\ en+\infty$

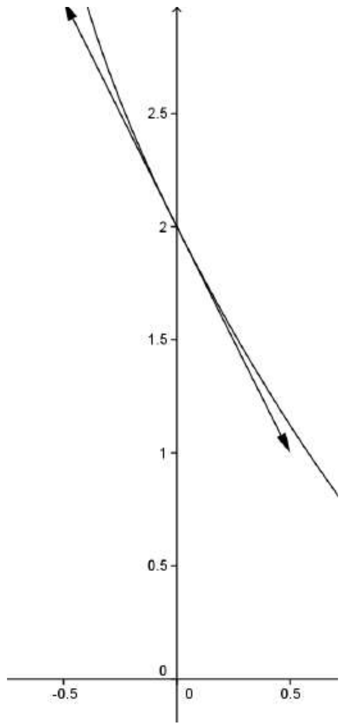
$Posons\ X = \frac{2}{x}.X \to 0\ quand\ x \to +\infty. \cos X - 1 \approx -\frac{X^2}{2}\ en\ 0\ donc \cos\left(\frac{2}{x}\right) - 1 \approx -\frac{2}{x^2}\ en+\infty$

$On\ en\ déduit\ que\ \frac{\tan\left(\frac{2x+1}{x^2-1}\right)}{\cos\left(\frac{2}{x}\right)-1} \approx \frac{\frac{2}{x}}{-\frac{2}{x^2}} = -x\ en+\infty\ donc\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\tan\left(\frac{2x+1}{x^2-1}\right)}{\cos\left(\frac{2}{x}\right)-1} = \lim_{x\to+\infty}(-x) = -\infty$

EXERCICE N°4 : (4 points)

1. $\sin 2x = 2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)\ \ donc\ f(x) = \frac{2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)}{x+x^2} = \frac{2 - \frac{4}{3}x^2 + o(x^2)}{1+x} = \left(2 - \frac{4}{3}x^2 + o(x^2)\right)\left(1 - x + x^2 + o(x^2)\right) = 2 - 2x + \frac{2}{3}x^2 + o(x^2)$

2. $\lim_{x\to 0} f(x) = 2;\ \ la\ droite\ \Delta\ d'\text{é}quation\ y = 2-2x\ \ est\ tangente\ \text{à}\ C_f;\ \frac{2}{3}x^2 \geq 0\ donc\ C_f\ est\ au\ dessus\ de\ \Delta.$



EXERCICE N°5 : (3 points)

$Posons\ X = \frac{1}{x}.Si\ x \to +\infty, alors\ X \to 0. \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)^x = (1+2X^2)^{\frac{1}{X}} = e^{\frac{1}{X}\ln(1+2X^2)}\ et\ x+2 = \frac{1}{X} + 2$

$\ln(1+2X^2) = 2X^2 + o(X^3);\ \frac{1}{x}\ln(1+2X^2) = 2X + o(X^2);\ (1+2X^2)^{\frac{1}{X}} = e^{2X+o(X^2)} = 1 + 2X + 2X^2 + o(X^2)$

$f(x) = \left(2 + \frac{1}{X}\right)\left(1 + 2X + 2X^2 + o(X^2)\right) = \frac{1}{X} + 4 + 6X + o(X) = x + 4 + \frac{6}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty;\ \ la\ droite\ \Delta\ d'\text{é}quationy = x+4\ est\ asymptote\ \text{à}\ C_f; si\ x > 0, \frac{6}{x} > 0\ donc\ C_f\ est\ au\ dessus\ de\ \Delta$

EXERCICE N°6 :(6 points)

1. La fonction f est dérivable donc continue sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ comme composée et produit de fonctions dérivables.

$$f(0)=0;\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{x^2}{x+4}}=0;\quad \left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}\end{array}\right\}\lim\limits_{x\to 0^-}\arctan\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2}\\ \lim\limits_{x\to 0}x=0\end{array}\right\}\lim_{x\to 0^-} f(x)=0 \text{ donc } f \text{ est continue en } 0$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\arctan\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2};\ \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{1}{x+4}}=\frac{1}{2} \text{ donc } f \text{ n'est pas dérivable en 0 mais est dérivable à gauche et à droite.}$$

La courbe de f admet en 0 deux demi-tangentes de coefficient directeur $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{1}{2}$.

2. $Soit\ X=\frac{1}{x}.Si\ x\to-\infty, X\to 0\ et \arctan X\approx X\ en\ 0\ donc \arctan\frac{1}{x}\approx\frac{1}{x}\ et\ f(x)\approx 1 en-\infty\ donc\ \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$

La droite d'équation $y=1$ est asymptote à la courbe de f en -∞

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x+4}=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty\end{array}\right\}\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

3. $sur\ ]0;+\infty[, f'(x)=\dfrac{x^2+8x}{2(x+4)^2\sqrt{\frac{x^2}{x+4}}}>0\ donc\ f\ est\ croissante.$

$sur\ ]-\infty;0[, f'(x)=\arctan\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}. f''(x)=-\frac{1}{1+x^2}-\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{-2}{(1+x^2)^2}<0\ donc\ f'est\ décroissante.$

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to 0}\arctan x=0\end{array}\right\}\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan\frac{1}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{1+x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0\end{array}\right\}\lim_{x\to-\infty}f'(x)=0\ \ donc\ f'est\ négative\ donc\ f\ est\ décroissante$$