

## CONTRÔLE ÉCRIT n°1

**Le sujet comporte deux pages.**

**La calculatrice et les documents sont interdits.**

**INDIQUER VOTRE GROUPE DE TD SUR VOTRE PREMIÈRE COPIE**

### EXERCICE N°1 : (3 points)

On rappelle la définition de l'équivalence de deux fonctions :

**Définition :** Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies au voisinage de  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ . On dit que  $f$  est équivalente à  $g$  en  $a$  et on note  $f \underset{a}{\approx} g$  si en  $a$ ,  $f - g = o(g)$ .

1. Rappeler la définition de la négligeabilité.
2. Démontrer que si  $f \underset{a}{\approx} g$  et si  $g \underset{a}{\approx} h$ , alors  $f \underset{a}{\approx} h$ .

### EXERCICE N°2 : (2 points)

Déterminer le développement limité de la fonction arctangente à l'ordre 5 en 0.

### EXERCICE N°3 : (2 points)

Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\tan\left(\frac{2x+1}{x^2-1}\right)}{\cos\left(\frac{2}{x}\right) - 1}$ .

### EXERCICE N°4 : (4 points)

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de  $f(x) = \frac{\sin 2x}{x + x^2}$ .
2. En déduire l'étude locale de  $f$  au voisinage de 0 (limite, tangente à  $C_f$ , position relative par rapport à  $C_f$ ). Tracer l'allure de  $C_f$  au voisinage de 0.

### EXERCICE N°5 : (3 points)

Etudier la branche infinie en  $+\infty$  la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = (x + 2) \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)^x$$

*Vous déterminerez la limite de  $f$  en  $+\infty$ , l'asymptote éventuelle à la courbe de  $f$  ainsi que la position relative de la courbe par rapport à l'asymptote.*

**EXERCICE N°6 :(6 points)**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} \text{si } x \in ]-\infty; 0[, f(x) = x \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \\ \text{si } x \in [0; +\infty[, f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{x+4}} \end{cases}$$

On rappelle quelques propriétés de la fonction arctan, résumées dans son tableau de variations :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
arctan	$-\frac{\pi}{2}$	$0$	$\frac{\pi}{2}$

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction  $f$ .
2. Déterminer les limites de la fonction  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ . On admettra que  $\arctan x \approx x$  en 0.
3. Etudier les variations de  $f$ .
4. Tracer une ébauche de la courbe de  $f$ . On fera apparaître en particulier les asymptotes éventuelles à la courbe de  $f$  ainsi que les tangentes ou demi-tangentes intéressantes.