EXERCICE N°1 :(4 points)

1ère méthode : par linéarisation

$$\sin(3t)\cos t = \frac{e^{3it}-e^{-3it}}{2i}\times\frac{e^{it}+e^{-it}}{2} = \frac{e^{4it}-e^{-4it}+e^{2it}-e^{-2it}}{4i} = \frac{2i\sin(4t)+2i\sin(2t)}{4i} = \frac{1}{2}(\sin(4t)+\sin(2t))$$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(\sin(4t)+\sin(2t))dt = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(4t)}{4}-\frac{\cos(2t)}{2}\right]_0^{\pi} = 0$$

2ème méthode : par double IPP

soit $u(t)=\sin(3t)$ ***et*** $v'(t)=\cos(t)$***; alors*** $u'(t)=3\cos(3t)$ ***et*** $v(t)=\sin t$***. u et v sont dérivables sur*** $\mathbb{R}$ ***de dérivées continues donc*** $I=[\sin(3t)\sin t]_0^{\pi}-3\int_0^{\pi}\cos(3t)\sin t\,dt = -3\int_0^{\pi}\cos(3t)\sin t\,dt$.

soit $u(t)=\cos(3t)$ ***et*** $v'(t)=\sin(t)$***; alors*** $u'(t)=-3\sin(3t)$ ***et*** $v(t)=-\cos t$***. u et v dérivables sur*** $\mathbb{R}$ ***de dérivées continues donc*** $I=-3[-\cos(3t)\cos t]_0^{\pi}+9\int_0^{\pi}\sin(3t)\cos t\,dt = 9I$ ***donc*** $8I=0$ ***donc*** $I=0$.

EXERCICE N°2 :(5 points)

1. Décomposition en éléments simples

$t^3+3t+1 = t(t^2+1)+2t+1$ *donc* $\dfrac{t^3+3t+1}{t(t^2+1)} = 1+\dfrac{2t+1}{t(t^2+1)}$. $\dfrac{2t+1}{t(t^2+1)} = \dfrac{a}{t}+\dfrac{bt+c}{t^2+1}$

$\dfrac{2t+1}{t(t^2+1)}\times t = \dfrac{2t+1}{(t^2+1)} = a+\dfrac{t(bt+c)}{t^2+1}$ *donc si* $t=0$*, on obtient* $1=a$. $\dfrac{2t+1}{t(t^2+1)}\times(t^2+1) = \dfrac{2t+1}{t} = \dfrac{a(t^2+1)}{t}+bt+c$

donc si $t=i$*, on obtient* $bi+c = \dfrac{2i+1}{i} = 2-i$ *donc* $c=2$ *et* $b=-1$ *donc* $\dfrac{t^3+3t+1}{t(t^2+1)} = \dfrac{1}{t}+\dfrac{-t+2}{t^2+1}$

$$I=\int_1^2\left(1+\frac{1}{t}+\frac{-t+2}{t^2+1}\right)dt = \int_1^2\left(1+\frac{1}{t}-\frac{1}{2}\times\frac{2t}{t^2+1}+2\times\frac{1}{t^2+1}\right)dt = \left[t+\ln t-\frac{1}{2}\ln(t^2+1)+2\arctan(t)\right]_1^2$$
$$= 1+\frac{3}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\ln 5+2\arctan 2-\pi$$

2. Changement de variable.

$$t=\ln x \Rightarrow x=e^t \text{ et } dx=e^t dt \Rightarrow J=\int_{\ln e}^{\ln e^2}\frac{t^3+3t+1}{e^t t(t^2+1)}e^t dt = \int_1^2\frac{t^3+3t+1}{t(t^2+1)}dt = I = 1+\frac{3}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\ln 5+2\arctan 2-\pi$$

EXERCICE N°3 : (4 points)

1. *soit* $X=2x$*. Si* $x\to 0$*, alors* $X\to 0$ *et* $\sin X = X-\dfrac{X^3}{3!}+o(X^3) \Rightarrow \sin(2x) = 2x-\dfrac{4}{3}x^3+o(x^3) \Rightarrow f(x) = \dfrac{2x-\frac{4}{3}x^3+o(x^3)}{x+x^2}$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{2-\frac{4}{3}x^2+o(x^2)}{1+x} = \left(2-\frac{4}{3}x^2+o(x^2)\right)\frac{1}{1+x} = \left(2-\frac{4}{3}x^2+o(x^2)\right)\left(1-x+x^2+o(x^2)\right) = 2-2x+\frac{2}{3}x^2+o(x^2)$$

2. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=2$; $T: y=2-2x$ *tangente à* C_f *en* 0; $\dfrac{2}{3}x^2\geq 0$ *donc* C_f *est au dessus de* T.

EXERCICE N°4 : (3 points)

$f(x)=(x+2)\left(1+\dfrac{2}{x^2}\right)^x = (x+2)e^{x\ln\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}$*. Posons* $X=\dfrac{1}{x}$*. Si* $x\to+\infty$*, alors* $X\to 0 \Rightarrow x\ln\left(1+\dfrac{2}{x^2}\right) = \dfrac{1}{X}\ln(1+2X^2)$

$Y=2X^2$*. Si* $X\to 0, Y\to 0$ $\ln(1+Y) = Y-\dfrac{Y^2}{2}+o(Y^2) \Rightarrow x\ln\left(1+\dfrac{2}{x^2}\right) = 2X-2X^3+o(X^3) \Rightarrow e^{x\ln\left(1+\frac{2}{x^2}\right)} = e^{2X-2X^3+o(X^3)}$

$Z=2X-2X^3+o(X^3)$*.* $X\to 0\Rightarrow Z\to 0$*.* $e^Z = 1+Z+\dfrac{Z^2}{2!}+\dfrac{Z^3}{3!}+o(Z^3) = 1+2X+2X^2-\dfrac{2}{3}X^3+o(X^3)$

$f(x)=(x+2)\left(1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{2}{3x^3}+o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)\right) = x+4+\dfrac{6}{x}+o\left(\dfrac{1}{x}\right) \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$; $D: y=x+4$ *asymptote à* C_f; $\dfrac{6}{x}>0$ *donc* C_f *est au dessus de* D.

EXERCICE N°5 :(4 points)

$$\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{4n-1}{n!\times 3^n}z^{n+2} = z^2\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{4n-1}{n!\times 3^n}z^n = z^2\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{4n-1}{n!}Z^n \text{ où } Z=\frac{z}{3}.$$

$\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{4n-1}{n!}Z^n$ *est de la forme* $\sum a_n z^n$ *avec* $a_n=\dfrac{4n-1}{n!}$. $|a_n|\sim\dfrac{4n}{n!} \Rightarrow \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\sim\dfrac{n+1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 0 \Rightarrow R=+\infty$

$$\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{4n-1}{n!}Z^n = 4\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{n}{n!}Z^n-\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{Z^n}{n!} = 4\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{Z^n}{(n-1)!}-\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{Z^n}{n!} = 4\sum_{p=2}^{+\infty}\frac{Z^{p+1}}{p!}-\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{Z^n}{n!} \text{ (en posant } p=n-1)$$

$$=4Z\sum_{p=2}^{+\infty}\frac{Z^p}{p!}-\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{Z^n}{n!} = 4Z\left(\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{Z^p}{p!}-Z-1\right)-\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{Z^n}{n!}-\frac{Z^2}{2}-Z-1\right) = 4Z(e^Z-Z-1)-\left(e^Z-\frac{Z^2}{2}-Z-1\right)$$

$$\text{donc } \sum_{n=3}^{+\infty}\frac{4n-1}{n!\times 3^n}z^{n+2} = z^2\left[e^{\frac{z}{3}}\left(\frac{4}{3}z-1\right)-\frac{7z^2}{18}-z+1\right]$$