

Devoir Écrit - Section PL1

Cours de *Fonctions et Variations*

18 janvier 2013 - Durée : 2 heures



Sans document ni calculatrice

Veuillez expliquer clairement vos calculs et vos raisonnements !

Problème 1 :

- 1) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathbb{R}$ un nombre réel.
 - a) Donnez une définition du domaine de définition de f ,
 - b) Donnez la définition du taux d'accroissement τ_a de f en a ,
 - c) Que doit vérifier τ_a pour que f soit dérivable en a ?
- 2) Énoncez la règle de l'Hôpital, sans oublier de préciser ses hypothèses.
- 3) Calculez les limites suivantes :
 - i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x}$.
 - ii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(3x - 2)}{x - 1}$.
 - iii. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos(x) + 1}{x - \pi}$.

Problème 2 :

On considère la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -1, \\ u_{n+1} = u_n/2 + 1. \end{cases}$$

- 1) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 2$,
- 2) Montrer que la suite (u_n) est croissante,
- 3) Montrer que la suite (u_n) converge. Quel théorème utilisez-vous pour cela ?

Problème 3 :

- 1) Donnez les règles de dérivation du produit, de la composée et du quotient de deux fonctions u et v de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .
- 2) Calculez la dérivée de chacune des fonctions suivantes :
 - i. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \tanh(e^x)$,
 - ii. $g :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que $g(x) = \operatorname{arcsinh}(x) \times [\ln \circ \operatorname{arccosh}(x)]$,

Problème 4 :

1) Calculez les primitives suivantes :

i. $\int \sin^2(x)dx,$

ii. $\int e^{\sqrt{x}}dx,$

iii. $\int \frac{x-2}{\sqrt{x^2-1}}dx,$

2) Donnez la formule de l'intégration par parties.

3) Calculez la primitive suivante :

$$\int x^2 \sin(x)dx.$$

4) Calculez la primitive suivante en faisant le changement de variables $u = \sqrt{x}$:

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx.$$