GAUTIER
Arthur

L1CPI1
2013

$\frac{15}{20}$.

Groupe A
L_1

Le 17/01/14

(1)

Fonctions et Variations

4,5

I)

$$I = \int_0^{\pi} (t^2+1)\sin(3t)\,dt.$$

(t^2+1) et $\sin(3t)$ sont continues sur $[0;\pi]$ puisque leurs dérivées sont définies sur $\mathbb{R}$. On suppose que leurs dérivées sont continues sur $[0;\pi]$.
??
On peut donc dire :

$$\int_0^{\pi} u'v = [uv]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} uv'$$

$u' = \sin(3t)$ $\quad u = -\frac{1}{3}\cos(3t)$
$v = t^2+1$ $\quad v' = 2t.$

$$I = \left[(t^2+1)\left(-\frac{1}{3}\cos(3t)\right)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\frac{1}{3}\cos(3t)\times 2t\,dt$$

$\cos(3\pi) \neq 1$.

$$= \left[(\pi^2+1)\left(\cancel{-\frac{1}{3}}\right) - (1)\left(-\frac{1}{3}\right)\right] + \frac{1}{3}\int_0^{\pi} \cos(3t)\times 2t\,dt$$

$$= -\frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\int_0^{\pi} 2t\cos(3t)\,dt$$

$I = -\frac{\pi^2}{3} + \frac{1}{3}\int_0^{\pi} 2t\cos(3t)\,dt$

$2t$ et $\cos(3t)$ sont définies sur $[0;\pi]$, dérivables sur $[0;\pi]$ et on suppose leur dérivées continues.

On peut donc écrire :

$$\int_0^{\pi} u'v = [u\,v]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} uv'$$

$u' = \cos(3t)$; $u = \frac{1}{3}\sin(3t)$

$v = 2t$; $v' = 2$

$$\int_0^{\pi} 2t\cos(3t)\,dt = \left[\frac{2}{3}t\sin(3t)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{2}{3}\sin(3t)\,dt$$

$$I = -\frac{\pi^2}{3} + \frac{1}{3}\left(\left[\frac{2}{3}\pi\sin(3\pi) - 0\right] - \frac{2}{3}\int_0^{\pi}\sin(3t)\,dt\right)$$

$$I = -\frac{\pi^2}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\left[-\frac{1}{3}\cos(3t)\right]_0^{\pi}\right)$$

$$I = -\frac{\pi^2}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\left(+\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right)\right) = -\frac{\pi^2}{3} - \frac{2}{9}\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$= -\frac{\pi^2}{3} - \frac{4}{27} = \frac{-9\pi^2 - 4}{27}.$$

Très bien !

II) 4

$$I = \int_1^2 \frac{t^4 + 3t + 1}{t^2(t+1)} dt$$

$$t^2(t+1) = t^3 + t^2$$

$$\begin{array}{l|l} t^4 + 3t + 1 & t^3 + t^2 \\ \hline -(t^4 + t^3) & t - 1 \\ \quad -t^3 + 3t + 1 & \\ -(-t^3 - t^2) & \\ \quad t^2 + 3t + 1 & \end{array}$$

$$I = \int_1^2 (t-1)\, dt + \int_1^2 \frac{t^2 + 3t + 1}{t^2(t+1)}$$

$$\frac{t^2 + 3t + 1}{t^2(t+1)} = \frac{a}{t+1} + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2}$$

⊗ $(t+1)$ et on évalue en -1

$$\frac{(-1)^2 - 3 + 1}{1} = a \Leftrightarrow a = -1$$

⊗ t^2 et on évalue en 0

$$\frac{1}{1} = c \Leftrightarrow c = 1.$$

$$\frac{t^2 + 3t + 1}{t^2(t+1)} = \frac{-1}{t+1} + \frac{b}{t} + \frac{1}{t^2}$$

$$\frac{t^2 + 3t + 1}{t^2(t+1)} + \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t^2} = \frac{b}{t} \Leftrightarrow \frac{b}{t} = \frac{2t^2 + 2t}{t^2(t+1)}$$

⊗ t et on évalue en 0

$\cancel{b = 0.}$

$$I = \int_1^2 (t-1)\,dt + \int_1^2 -\frac{1}{t+1} + \frac{1}{t^2}\,dt$$

$$I = \int_1^2 (t-1)\,dt + \int_1^2 -\frac{1}{t+1}\,dt + \int_1^2 \frac{1}{t^2}\,dt$$

$$\left(+\frac{1}{2}t^2 - t\right)' = t-1$$

$$\left(-\frac{1}{t+1}\right) = -\ln\left(t+1\right)'$$

$$\left(\frac{1}{t^2}\right) = \left(-\frac{1}{3} \times \frac{1}{t^3}\right)'$$

$$I = \left[\frac{1}{2}t^2 - t\right]_1^2 + \left[-\ln(t+1)\right]_1^2 + \left[-\frac{1}{3} \times \frac{1}{t^3}\right]_1^2$$

$$= \left[(2-2) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right] + \left[-\ln(3) + \ln(2)\right] + \left[\left(-\frac{1}{3} \times \frac{1}{8}\right) - \left(-\frac{1}{3} \times 1\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2} - \ln(3) + \ln(2) + \left[-\frac{1}{24} + \frac{1}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{2} - \ln(3) + \ln(2) + \frac{7}{24}$$

$$= \frac{19}{24} - \ln(3) + \ln(2)$$

cohérent.

GAUTIER
Arthur
Groupe A
L_1

Le 17/01/14

②

Fonctions et Variations

II)

1) $I = \frac{19}{24} - \ln(3) + \ln(2)$

2) $J = \int_1^4 \frac{x^2 + 3\sqrt{x} + 1}{x\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} dx$

$\cancel{I = \int_1^2 \frac{t^4 + 3t + 1}{t^2(t+1)} dt}$

$x = t^2 \Leftrightarrow t = \sqrt{x}$

$\frac{dt}{dx} = \frac{(t^2)'}{(x)'} = 2t \Rightarrow dt = 2t\,dx$

$a = 2 \Leftrightarrow a^2 = 4$

$b = 1 \Rightarrow b^2 = 1$

$x = t^2$ et $t = \sqrt{x}$.

~~Remplaçons dans le calcul de I.~~

$\cancel{J = \left[+\frac{1}{2}x - \sqrt{x}\right]_1^4 + \left[-\ln(\sqrt{x}+1)\right]_1^4 + \left[-\frac{1}{3} \times \frac{1}{x\sqrt{x}}\right]_1^4}$

$\cancel{= \left((2-1) - \left(\frac{1}{2}-1\right)\right) + \left(-\ln(3) + \ln(2)\right) + \left(-\frac{1}{3} \times \frac{1}{8} + \frac{1}{3}\right)}$

2) $I = \int_1^2 \frac{t^4+3t+1}{t^2(t+1)}\,dt = \frac{19}{24} - \ln(3) + \ln(2)$

$J = \int_1^4 \frac{x^2+3\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}\,dx$

$x = t^2 \Leftrightarrow t = \sqrt{x}$

$a = 2 \Leftrightarrow \varphi(a) = 2^2 = 4$

$b = 1 \Leftrightarrow \varphi(b) = 1^2 = 1$

Comme $J = I$ si $t = \sqrt{x}$, on peut dire que $\int_1^2 \frac{t^4+3t+1}{t^2(t+1)}\,dt = \int_1^4 \frac{x^2+3\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$

Donc, $I = J = \frac{19}{24} - \ln(3) + \ln(2)$

III) 14

1) $f(x) = \dfrac{\ln(1+2x)}{\sin x}$

Posons $X = 2x$: $X \underset{x \to 0}{\to} 0$

$\ln(1+X) = X - \dfrac{X^2}{2} + \dfrac{X^3}{3}$

$= 2x - 2x^2 + \dfrac{8x^3}{3}$

$\sin x = x \underbrace{- \dfrac{x^3}{3!} + o(x^3)}_{o(x^2)}$

$\sin x = x + o(x^2)$) ordre insuffisant (simplificat...

$\cancel{\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} + x + o(x^3)} \;\Big|\; \cancel{x + o(x^3)}$

$\cancel{-\left(\dfrac{x^2}{3}\right)} \qquad \cancel{\dfrac{x^2}{3}}$

$$
\begin{array}{l|l}
\dfrac{8x^3}{3} - 2x^2 + 2x + o(x^3) & x + o(x^2) \\
\hline
-\left(\dfrac{8}{3}x^3\right) & \dfrac{8}{3}x^2 - 2x + 2 + o(x^2) \\
\quad -2x^2 + 2x + o(x^3) & \\
\quad -(-2x^2) & \\
\qquad 2x + o(x^3) & \\
\qquad -(2x) & \\
\qquad\quad o(x^3) & \\
\qquad\quad -(o(x^3)) & \\
\qquad\quad 0. &
\end{array}
$$

$DL_2\; f(x) = 2 - 2x \cancel{+ \dfrac{8}{3}} x^2 + o(x^2)$

2) DL_2 $f(x) = 2 - 2x + \frac{8}{3}x^2 + o(x^2)$

$U_n = \frac{\ln(1+\frac{2}{n})}{\sin(\frac{1}{n})} - 2 + \frac{2}{n}$

On pose $x = \frac{1}{n}$. $\longrightarrow 0$?

$U_n = \cancel{2} - \cancel{2x} + \frac{8}{3}x^2 - \cancel{2} + \cancel{2x}$

$U_n = \frac{8}{3}\cancel{x}^2$

~~Quand~~ $\lim_{x \to +\infty}(U_n) = \lim_{x \to +\infty}(x^2) = +\infty$. $n \neq x$.

Donc, U_n diverge

IV)

2

$f(x) = (x-1)\left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$

$f(x) = (x-1)e^{x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}$

Posons $X = \frac{2}{x}$: $X \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

$\ln(1+X) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} + o(X^3)$

$= \frac{2}{x} - \frac{4}{2x^2} + \frac{8}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$

$= \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{8}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$

GAUTIER
Arthur
Groupe A
L_1

③ le 17/01/14

Fonctions et Variations

IV) 1

$f(x) = (x-1)\, e^{x \ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}$

$\ln(1+2x) = \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{8}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$

$x \ln(1+x) = 2 - \frac{2}{x} + \frac{8}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

$f(x) = (x-1)\, e^{2 - \frac{2}{x} + \frac{8}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)}$

$f(x) = (x-1)\, e^{2\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{4}{x^3}\right) + o\left(\frac{1}{x^2}\right)}$

Posons $X = 2 - \frac{2}{x} + \frac{8}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \not\to 0$!!

$e^X = 1 + X + \frac{X^2}{2!} + o(X^2)$

$= 1 + 2 - \frac{2}{x} + \frac{8}{3x^2} + 4 - \frac{8}{x} + \frac{12}{x^2} - \frac{32}{x^3} + \frac{72}{9x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$

$= 7 - \frac{10}{x} + \frac{44}{3x^2} - \frac{32}{x^3} + \frac{72}{9x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 7.$

f admet une asymptote oblique en $+\infty$ d'équation : $\Delta : 7 - \frac{10}{x}$

$f - \Delta = \frac{+4}{3x^2}$.

Comme x tend vers $+\infty$,

$f - \Delta = 0^+$. La courbe est au-dessus de l'asymptote

01

V

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{4n-1}{9^n} 3^{2n+1}$$

PH

$$|a_n| = \frac{4n-1}{9^n}$$

$$|a_{n+1}| = \frac{4(n+1)-1}{9^{n+1}} = \frac{4n+3}{9^{n+1}}$$

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{4n+3}{9^{n+1}}}{\frac{4n-1}{9^n}} = \frac{4n+3}{9^{n+1}} \times \frac{9^n}{4n-1} = \frac{4n+3}{36n-9}$$

Comme n tend vers $+\infty$, $\frac{4n+3}{36n-9} \underset{+\infty}{\sim} \frac{4n}{36n} = \frac{1}{9}$.

Donc, $R = 9$. mais $R_3 =$