Nom et prénom de l'étudiant :

Classe : PL1
Date : 23 juin 2014
Durée de l'épreuve : 2 h
Documents et calculatrices interdits.

Les dix exercices sont indépendants. Les solutions doivent être rédigées de manière rigoureuse. Les calculs doivent être détaillés. Toute affirmation doit être démontrée (y compris une réponse par oui ou par non). Barème : 2 points par exercice.

Exercice 1 On note $X = \mathbb{R}$ la droite réelle munie de la distance euclidienne. On rappelle que $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels. On considère les deux sous-ensembles de X suivants :

$$E = [0,2[\cup]1,+\infty[$$

$$F = [0,1] \cap \mathbb{Q}$$

E est-il un ouvert dans X ? Est-il un fermé ? F est-il dénombrable ? Est-il un fermé de X ?

Exercice 2 Calculez la limite suivante, si elle existe :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Exercice 3 La série suivante est-elle convergente ?

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n(\ln n)^2}+\frac{1}{n}\right)$$

Exercice 4 La série suivante est-elle convergente ?

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n}\times 2^n}{(\ln n)^{73}}$$

Exercice 5

i) Donnez un exemple de fonction définie sur $[0,1]$, continue, et vérifiant la propriété suivante : pour tout $x \in [0,1]$, si f est dérivable en x alors $f'(x) \neq f(1) - f(0)$.

   Vous pourrez décrire cette fonction au moyen de sa courbe représentative.

ii) Donnez un exemple de fonction définie et continue sur $[0,1]$, mais non dérivable en $x = \frac{1}{2}$ (ici vous décrirez explicitement les valeurs de la fonction, sans tracer la courbe représentative).

Exercice 6 Enoncez le théorème des accroissements finis, avec toutes ses hypothèses.

Exercice 7 Soit f une fonction définie et continue sur $[0,1]$, à valeurs dans $[0,1]$. Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$. Si on suppose de plus que f est décroissante, montrer que x est unique.

Exercice 8

i) Calculez un développement limité de $\sqrt{x}$, en $x=1$, à l'ordre 3.

ii) Calculez un développement limité de la fonction $\frac{1}{x^2+\sqrt{x}}$, en $x=1$, à l'ordre 3.

Exercice 9 Donnez la solution générale de l'équation différentielle suivante :

$$y''-y=x$$

Indication : cherchez d'abord une solution particulière de l'équation, sous la forme d'un polynôme en x.

Exercice 10

i) Calculez une primitive de $\frac{1}{(\cos x)^2}$

ii) Utilisez cette primitive pour résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\sqrt{y'}-\cos y=0$$

Condition initiale : $y(0)=0$.