NOM LELLOUCHE

Prénom Léo

Promo 2020

Date 06/01/2016

	0	4	5	0

LELLOUCHE Léo
L1 - 2015

Groupe A : M ACHVAR

MATIÈRE Fonctions et variations

Exercice 2 : question 1 :

$$f(x) = \frac{\sin(2x)}{\sqrt{1+x}} = \sin(2x) \times \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

On pose $X = 2x$ si $x \to 0$ $X \to 0$ ✓ 0,75

$DL_2(0)\ \sin(X) = X + o(X^2) \Leftrightarrow DL_2(0) \sin(2x) = 2x + o(4x^2)$ ✓

On pose maintenant $X = \sqrt{1+x} - 1$

Si $x \to 0$ $X \to 0$

$$DL_2(0)\ \frac{1}{1+X} = 1 - X + X^2 + o(X^2)$$ 0,25

$$\text{Donc } DL_2(0)\ \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \cancel{(\sqrt{1+x} - 1)} + (\sqrt{1+x} - 1)^2 + o(x^2)$$

$$= 1 - \sqrt{1+x} + 1 + 1 + x - 2\sqrt{1+x} + 1 + o(x^2)$$

$$= 4 - 3\sqrt{1+x} + x + o(x^2)$$

$$\text{Donc } DL_2(0)\ \frac{\sin(2x)}{\sqrt{1+x}} = [2x + o(4x^2)][4 - 3\sqrt{1+x} + x + o(x^2)]$$

$$\boxed{= 8x - 6x\cancel{\sqrt{1+x}} + 2x^2 + o(x^2)}$$

Question 2 :

On pose $X = \frac{1}{x}$ si $x \to \infty$ $X \to 0$

Donc $g(X) = \left[\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1\right] \times f(X)$

Si $X = 0$: $f(0) = 0$

Donc lorsque x tend vers l'infini : $\dfrac{\sin\left(\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = 0$

Donc lorsque $x \to \infty$: $g(x) = \underbrace{(x^2+1)}_{\text{tend vers} +\infty} \underbrace{\dfrac{\sin\left(\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}}_{\text{egal à } 0}$

Vu que zero est une valeur exacte, $\lim_{x \to +\infty} \cancel{g(x) = 0}$

Exercice 4 :

Question 1a :

$f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-3x-4}$

On simplifie $f(x)$ par division euclidienne pour obtenir A.

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 1 & x^2 - 3x - 4 \\ \cline{2-2} -(x^2 - 3x - 4) & 1 \\ \hline 3x + 5 & \end{array}$$

Donc $f(x) = 1 + \dfrac{3x+5}{x^2-3x-4}$

Pour determiner B, on multiplie de chaque coté par $(x+1)$ de manière à isoler B.

$$\frac{(x^2+1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}(x-4)} = 1(x+1) + B + \frac{C(x+1)}{(x-4)(x+1)}$$

Si je fais tendre x vers -1 :

$$\frac{(-1)^2+1}{-1-4} = -\frac{2}{5} = -0{,}4 = B$$

ok

Donc $\cancel{\boxed{B = -0{,}4}}$

3,5

Par raisonnement analogue, si x tend vers 4 :

$$\frac{(x^2+1)}{x+1} = C$$

$$\frac{4^2+1}{4+1} = \frac{17}{5} = 3{,}4 = C$$

$\boxed{\text{Donc } C = 3{,}4}$

On vérifie en prenant par exemple $x = 10$

$$f(10) = \frac{10^2 + 1}{10^2 - 3 \times 10 - 4} = \frac{101}{64}$$

Et

$$1 - \frac{0,4}{10+1} + \frac{3,4}{10-4} = 1 - \frac{4}{110} + \frac{34}{60}$$

$$= 1 - \frac{2}{55} + \frac{17}{30}$$

$$= 1 - \frac{30 \times 2}{55 \times 30} + \frac{17 \times 55}{55 \times 30}$$

$$= 1 + \frac{-60 + 950}{1650}$$

$$= 1 + \frac{89\cancel{0}}{165\cancel{0}}$$

$$= \frac{254}{165}$$

?

0

on vérifie par produit en croix : $101 \times 165 = 16\,665$

$64 \times 254 = 16\,256.$

Etant donné la précision des calculs, cet écart semble indiquer que A, B et C sont bons.

NOM LELLOUCHE

Prénom Léo

Promo 2020

Date 06/01/2016

Groupe A : M ACHVAR

MATIÈRE Fonctions et variations

Exercice 4 suite :

Question 1 b :

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 1 - \frac{0,4}{x+1} + \frac{3,4}{x-4}\,dx$$

$$= 0,4\int_0^1 -\frac{1}{x+1}\,dx + 3,4\int_0^1 -\frac{1}{-x+4}\,dx$$

On sait que $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

On pose donc $X = \sqrt{x+1}$ si $x \to 0$ $X \to 1$

si $x \to 1$ $X \to \sqrt{2}$

Donc $\int_0^1 f(x)\,dx = 0,4\int_1^{\sqrt{2}} -\frac{1}{X^2}\,dX + 3,4\int_0^1 -\frac{1}{-x+4}\,dx$

$$= 0,4\left[\frac{1}{X}\right]_1^{\sqrt{2}} + 3,4\int_0^1 -\frac{1}{-x+4}\,dx$$

$$= 0,4\left[\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right]_0^1 + 3,4\int_0^1 -\frac{1}{-x+4}\,dx$$

On pose maintenant $X = \sqrt{-x+4}$ si $x \to 0$ $X \to 2$

$x \to 1$ $X \to \sqrt{5}$

Donc $f(x) = 0,4\left[\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right]_0^1 + 3,4\int_2^{\sqrt{5}} -\frac{1}{X^2}\,dx$

$$= 0,4\left[\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right]_0^1 + 3,4\left[\frac{1}{\sqrt{-x+4}}\right]_0^1$$

Donc $\int_0^1 f(x)\,dx = 0,4\left[\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right]_0^1 + 3,4\left[\frac{1}{\sqrt{-x+4}}\right]_0^1$

$$= \left(0,4 \times \frac{1}{\sqrt{2}} + 3,4 \times \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \left(0,4 + 3,4 \times \frac{1}{2}\right)$$

$$= \left(0,4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 3,4\,\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \left(0,4 + 1,7\right)$$

$$= \left(\frac{1,2\sqrt{2}}{6} + \frac{6,8\sqrt{3}}{6}\right) - 2,1$$

$$\boxed{= 0,2\sqrt{2} + \frac{6,8\sqrt{3}}{6} - 2,1}$$

$\sqrt{2} \simeq 1,4$

$\sqrt{3} \simeq 1,7$

$$\simeq 0,28 + 1,13\sqrt{3} - 2,1$$

$$\simeq 0,28 + 1,92 - 2,1$$

$$\boxed{\simeq -0,1}$$

Question 2 :

$$g(x) = \frac{(\ln x)^2 + 1}{x\left[(\ln x)^2 - 3\ln x - 4\right]} = \frac{1}{x} \times f(\ln x)$$

$\ln e^x = x$

Donc

Exercice 3 :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2+1)\sin(2x)\,dx$$

On integre par integration par partie :

On pose $u = (x^2+1)$ $\quad u' = 2x$

$v = -\cos 2x$ $\quad v' = \sin 2x$

$$I = (x^2+1)(-\cos 2x) + \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x)(-\cos 2x)\,dx}$$

$$(2x)(-\cos 2x) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} -2\sin 2x\,dx$$

$$I = (-x^2\cos 2x - \cos 2x) - 2x\cos 2x + \Big[2\cos 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 0 - (1+2)$$

$$= -3$$

Donc $\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2+1)\sin(2x)\,dx = -3}$