

DEVOIR ECRIT Janvier 2016

Exercice n°1 : (3 points)

Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $f(x) = (1 + 2x)^{\frac{1}{x}}$.

Exercice n°2 : (5 points)

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $f(x) = \frac{\sin(2x)}{\sqrt{1+x}}$.

2. En déduire l'étude de la branche infinie en $+\infty$ de la fonction g définie par

$$g(x) = (x^2 + 1) \frac{\sin\left(\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$

Exercice n°3 : (4 points)

Calculer l'intégrale I suivante :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 + 1) \sin(2x) dx$$

Exercice n°4 : (5 points)

1. On considère la fonction f définie sur $] -1; 4[$ par $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-3x-4}$.

a. Déterminer trois réels a, b, c tels que $\forall x \in] -1; 4[, f(x) = a + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-4}$.

b. En déduire l'intégrale $I = \int_0^1 f(x) dx$

2. Déduire de ce qui précède la valeur de l'intégrale J suivante :

$$J = \int_1^e \frac{(\ln x)^2 + 1}{x[(\ln x)^2 - 3 \ln x - 4]} dx$$

Exercice n°5 : (3 points)

On considère la série de terme général $u_n = \frac{3}{(n+1)(n+2)}$

1. Montrer que cette série est convergente.

2. Calculer sa somme.