Récurrence faciles

La factorielle $0! = 1$ $n! = (n-1)(n-2)\dots(1)$ $n+1! = (n+1)n!$

ACT Montrer par récurrence

$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \forall n \geqslant 1 : 1 + x + \dots + x^n = \dfrac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$

$HR(1) : \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1 \quad \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = x^2 - 1$

$HR(n) : \dfrac{x^{n+1} - 1}{x - 1} = 1 + x + \dots + x^n$

$HR(n) \Rightarrow HR(n+1) : \dfrac{x^{(n+1)} - 1}{x - 1} + x^{n+1} = 1 + x + \dots + x^n + x^{n+1}$

$= \dfrac{x^{n+1} - 1 + x^{n+1}(x-1)}{x - 1} = \dfrac{x^{n+2} - 1}{x - 1}$ soit $HR(n+1)$

ACT Montrer par récurrence

$\forall n \geqslant 4, \quad n! \geqslant 2^n$

$HR(4) : \quad 4! \geqslant 2^4 \qquad 24 \geqslant 16$

$HR(n) : \quad n! \geqslant 2^n$

$HR(n+1) : \quad (n+1)n! \geqslant (n+1)2^n$, montrons $(n+1)2^n \geqslant 2^{n+1}$

$\dfrac{(n+1)2^n}{2^n} \geqslant \dfrac{2^{n+1}}{2^n} \Rightarrow (n+1) \geqslant 2$ vrai par hypothèse

On a montré que $n+1! \geqslant (n+1)2^n \geqslant 2^{n+1}$ d'où $n+1! \geqslant 2^{n+1}$ soit $HR(n+1)$

Un peu de trigo hyperbolique

On rappelle $ch x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\quad sh\, x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

Montrons :
- $ch^2 x - sh^2 x = 1 \qquad (a^2 - b^2) = (a-b)(a+b)$
- $sh\, 2x = 2 ch x\, sh x \qquad (a+b)(a-b)$
- $ch\, 2x = sh^2 x + ch^2 x \qquad (a+b)^2 + (a-b)^2$

- $ch^2 x - sh^2 x = (ch x - sh x)(ch x + sh x)$

$= \dfrac{1}{4}(e^x + e^{-x} + e^{-x})(e^x + e^{-x} + e^x - e^{-x})$

$= \dfrac{1}{4}(2e^{-x})(2e^x) = e^{-x}e^x = 1$

• $2\,ch x\, sh x = \frac{2}{4}(e^{x}+e^{-x})(e^{x}-e^{-x})$
$= \frac{1}{2}(e^{2x}-e^{-2x})$
$= sh\,2x$

• $sh^2 x + ch^2 x = \frac{1}{4}(e^{2x}+2e^{x}e^{-x}+e^{-2x}) + (e^{2x}-2e^{x}e^{-x}+e^{-2x})$
$= \frac{1}{4}\; 2e^{2x}+2e^{-2x}$
$= \frac{1}{2}(e^{2x}+e^{-2x}) = ch\,2x$

Exo Trigo Hyperbolique

Pour $x \in \mathbb{R}^*$ on considère $P_n = \prod_{k=0}^{n} ch\left(\frac{x}{2^k}\right) = ch x\; ch\frac{x}{2} \;\ldots\; ch\frac{x}{2^n}$

1) Montrer par récurrence : $\prod_{k=0}^{n} ch\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{sh\,2x}{2^{n+1} sh\left(\frac{x}{2^n}\right)}$

On remarque que $\frac{x}{2^n} = 2\frac{x}{2^{n+1}}$

On peut faire l'hypothèse $n \geq 0$ et commencer à $HR(0)$

$HR(0)$: $\prod_{k=0}^{0} ch\frac{x}{2^k} = ch x = \frac{sh\,2x}{2\,sh x} \Leftrightarrow sh\,2x = 2\,sh x\,ch x$
(qu'on vient de montrer)

$HR(n)$: $P_n(x) = \frac{sh\,2x}{2^{n+1} sh\left(\frac{x}{2^n}\right)}$

$HR(n) \Rightarrow HR(n+1)$: $P_n(x) = \frac{sh\,2x}{2^{n+1} sh\left(\frac{x}{2^n}\right)} \times ch\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$

$\frac{x}{2^n} = 2\frac{x}{2^{n+1}}$ + formule $sh\,2x = 2\,sh x\,ch x$

$sh\frac{x}{2^n} = sh\,2\frac{x}{2^{n+1}} = 2\,ch\frac{x}{2^{n+1}}\; sh\frac{x}{2^{n+1}}$ d'où

$P_{n+1}(x) = \frac{sh\,2x}{2^{n+2} sh\frac{x}{2^{n+1}}\, ch\frac{x}{2^{n+1}}}\; ch\frac{x}{2^{n+1}} = \frac{sh\,2x}{2^{n+2}\, sh\frac{x}{2^{n+1}}}$ soit $HR(n+1)$

2) En utilisant la limite d'un taux de variation déterminé

$\lim_{t \to 0} \frac{sh\, t}{t}$

Si f est dérivable en a, alors $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$

La fct°: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \to sh\, t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ dc 0 est

$\lim_{t \to 0} \frac{sh\, t - sh\, 0}{t - 0} = sh'(0) = ch(0) = 1$

3) Déduire du 2), pour x fixé, $\lim_{n \to \infty} P_n(x)$

Il faut trouver un moyen d'utiliser $\lim_{t \to 0} \frac{sh\, t}{t}$ dans la limite

$\lim_{n \to \infty} \frac{sh\, 2x}{2 \cdot 2^n sh \frac{x}{2^n}}$

$$2^{n+1} sh \frac{x}{2^n} = 2x \underbrace{\overset{1/t}{\left(\frac{2^n}{x}\right)} \overset{sh\, t}{sh \frac{x}{2^n}}}_{\frac{sh\, t}{t} \text{ avec } t = \frac{x}{2^n}}$$

D'où $P_n(x) = \frac{sh\, 2x}{2x \left(\frac{2^n}{x}\right) sh\left(\frac{x}{2^n}\right)}$ $\quad \lim_{n \to +\infty} \frac{x}{2^n} = 0$ dc

$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2^n}{x}\right) sh\left(\frac{x}{2^n}\right) = \lim_{t \to 0} \frac{sh\, t}{t} = 1$, d'où $\lim_{n \to +\infty} P_n(x) = \frac{sh\, 2x}{2x}$