TAI de Fonctions et Variations (prof. : E. Penchèvre)

Classe : PL1
Date : printemps 2014

Le travail sera effectué par groupe de trois personnes.

La soutenance orale, pour le TAI, durera vingt minutes par groupe, chacun devant parler environ cinq minutes. Il y aura tableau, craies, vidéoprojecteur (pour utiliser le vidéoprojecteur, venez avec votre propre ordinateur).

Le rapport écrit, simplement agrafé (pas de reliure s'il-vous-plaît), sera remis lors de la dernière séance de TD (pendant la semaine précédent le début des soutenances de TAI). La soutenance orale doit être conforme au texte du rapport.

Quand vous utilisez des sources extérieures (consultation d'un livre, d'une encyclopédie, d'un site Internet, d'une tierce personne, etc.) ou des outils (logiciel de calcul numérique, système de calcul formel, etc.), indiquez-le de manière détaillée dans votre rapport ainsi que dans votre exposé oral.

Théorème Soit f une fonction continue définie sur un intervalle fini $[a,b]$ et $y_0 \in [a,b]$. Alors il existe une solution $t \to y(t)$ de l'équation différentielle $y' = f(y)$ telle que $y(0) = y_0$. Elle est au moins définie sur l'intervalle suivant :

$$\left[-\frac{D}{M}, \frac{D}{M}\right]$$

où $D = \min(|y_0 - a|, |y_0 - b|)$ et $M = \max_{[a,b]} |f|$.

Question 1 On peut calculer la solution dont le théorème précédent prédit l'existence de manière approchée en discrétisant l'intervalle de temps. On choisit un pas $\Delta t > 0$ et on pose :

$$y_n = y(n\Delta t)$$

Alors la suite définie par

$$y_{n+1} = y_n + f(n\Delta t)\Delta t$$

est cette solution approchée. Expliquez pourquoi c'est une solution approchée. Réalisez une routine en C ou en C++ qui exécute ce calcul et renvoie :

- un tableau contenant les y_n représentés par des flottants →
- une liste de points $(n\Delta t, y_n)$ affichée à l'écran
- le graphe représentant la fonction $t \to y(t)$

Pour les primitives graphiques, on pourra utiliser `pl_selectpl`, `pl_newpl`, `pl_openpl`, `pl_closepl`, `pl_fspace`, `pl_fcont` (bibliothèque `libplot` de la suite logicielle *GNU plotutils*).

Question 2 On considère une masse ponctuelle m suspendue à une tige (de poids négligeable) de longueur ℓ et soumise à l'action de la pesanteur. L'angle θ formé par la tige avec la direction verticale obéit à l'équation différentielle :

$\dot{\theta}$ $\theta'(t)$ $\frac{d\theta}{dt}$

$$\frac{1}{2}\ell\dot{\theta}^2 + 2g\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{h}{m\ell}$$

~~g(t)~~ y(

Utilisez la routine développée dans la question précédente pour résoudre l'équation du pendule simple. On prendra $l = 1$ m, $g = 10$ ms^{-2}, $m = 1$ kg, $h = 40$ J. Condition initiale : $\theta_0 = 0$.

Montrez que le théorème permet de calculer une solution approchée pour $t \in [0, T]$ quelque soit T. On essaiera avec $T = 1$ s, 10 s, 60 s.

Pour coder la fonction f, on pourra utiliser la bibliothèque standard C et son fichier d'entête `math.h`.

Question 3 On cherche une autre méthode de résolution numérique. On voudrait utiliser la méthode vue en cours. Elle suppose un calcul d'intégrale. Vous avez aussi vu en cours comment calculer une intégrale de manière approchée au moyen des sommes de Riemann : utilisez cette méthode pour calculer l'intégrale

$$\int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}y}{f(y)}.$$

↳ somme des quotients ordonnés de la suite alterné donnant α.

Modifiez la routine de la question 1 pour appliquer cette nouvelle méthode.

Question 4 En utilisant la routine de la question 1, on voudrait concevoir un programme pour résoudre n'importe quelle équation différentielle autonome d'ordre 1. Il devra prendre en arguments de la ligne de commande :

- la fonction f
- un intervalle de temps $[0, T]$
- la condition initiale y_0
- le nombre de pas $N = \dfrac{T}{\Delta T}$

Expliquez comment réaliser un tel programme.