7)

$Pour\ x > 0\ et\ y > 0, on\ montre\ que : \boldsymbol{(x+y)\ln(x+y) \geq xlnx + ylny}$

$(x+y) * (lnx + lny) \geq xlnx + ylny$
$\boldsymbol{xlnx + xlny + ylnx + ylny \geq xlnx + ylny}$

$Donc\ l'équation\ est\ confimée.$
$Elle\ est\ suppérieure\ à\ (xlnyx + ylny)\ ou\ nulle\ si :$
$xlny + ylnx = 0$

---

8)

$On\ cherche\ la\ dérivée\ de\ f(x) = \left(\frac{1+2x}{1-x}\right)^2$

$$f'(x) = \frac{2+4x}{1-x} * \frac{(2-x)-(-1-2x)}{1+x^2-2x} \quad = \quad \frac{2+4x}{1-x} * \frac{3+x}{1-2x+x^2}$$

$$= \frac{(2+4x)*(3+x)}{(1-x)*(1-2x+x^2)} \ = \frac{6x+2x+12x+4x^2}{1-2x+x^2-x+2x^2-x^3}$$

$$= \boldsymbol{\frac{6+14x+4x^2}{1-3x+3x^2-x^3}}$$

---

9)

$On\ cherche\ la\ dérivée\ seconde\ de\ f(x) = e^{x^2-3}$
$f'(x) = 2x\ e^{x^2-3}$
$f''(x) = uv' + u'v$

On a $u(x) = 2x, \quad u'(x) = 2$
$v(x) = e^{x^2-3},\ v'(x) = 2xe^{x^2-3}$

$f''(x) = 2 * e^{x^2-3} + 2x * 2xex^{x^2-3}$
$= \boldsymbol{e^{x^2-3}[2x * 2x + 2]}$

---

10)

$On\ cherche\ la\ dérivée\ de\ f(x) = \ln(3x^2-1)$

$$f'(x) = \frac{1}{3x^2-1} * 6x \ = \boldsymbol{\frac{6x}{3x^2-1}}$$

11)

$On\ cherche\ à\ montrer\ par\ réccurence\ que : 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$-$ 1ére étape : $On\ vérifie\ que\ la\ propriété\ marche\ au\ rang\ 1,\ c'est\ l'initialisation$

$$\frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$-$ 2ieme étape : Hérédité. $On\ suppose\ que\ c'est\ vrai\ au\ rang\ P, soit :$

$$1 + 2 + \cdots + p = \frac{p(p+1)}{2}$$

$Et\ on\ montre\ ensuite\ que\ la\ propriété\ est\ vraie\ au\ rang\ p+1, soit :$

$$1 + 2 + \cdots + (p+1) = \frac{(p+1)(p+2)}{2}$$

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + (p+1) &= (1 + 2 + \cdots + p) + (p+1) \\ &= \frac{p(p+1)}{2} + (p+1) \\ &= \frac{p(p+1) + 2(p+1)}{2} = \frac{\boldsymbol{(p+1)(p+2)}}{\mathbf{2}} \end{aligned}$$

$Il\ y\ a\ hérédité.$

$Donc\ par\ réccurence, la\ propriété\ est\ vrai\ pour\ tout\ n\ non\ nul.$

---

12)

$Montrez\ par\ réccurence\ que : 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$-$1ére étape : $Initialisation. On\ vérifie\ que\ c'est\ vrai\ au\ rang\ 1.$

$$1^2 = \frac{1(1+1) * (2+1)}{6} \quad : Ok.$$

$-$2ieme étape : Hérédité. $On\ suppose\ que\ c'est\ vrai\ au\ rang\ \mathbf{n}, soit :$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$Et\ on\ montre\ ensuite\ que\ la\ propriété\ est\ vrai\ au\ rang\ \mathbf{n+1}$:

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{n+1[n(2n+1) + 6n + 6]}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} \end{aligned}$$

$On\ sait\ que\ 2n^2 + 7n + 6 = (n+2)(2n+3),$

$$donc\ \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$Donc, si\ on\ remplace\ n\ par\ n+1,$

$on\ démontre\ bien\ par\ réccurence\ que\ la\ relation\ est\ vraie\ au\ rang\ n+1$