Travaux dirigés n°1

Exercice n°1 :

Déterminer, si elles existent, les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2+4x-1}{-5x^2+2x+1}$
2. $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{3x^2+2x-1}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{4x+1}{1-x}$
4. $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{4x+1}{x^2-3x+2}$
5. $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{x-1}{5-4x-x^2}$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x\cos x-1}{x^2}$
7. $\lim\limits_{x\to1} \ln\left(\dfrac{4x+1}{1-x}\right)$
8. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\mathrm{e}^{-2x}-1}{x}$
9. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$
10. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+2x+4}+x\right)$

Exercice n°2 :

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\cos x}{\tan^2 x}$
2. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^2\ln x}{x^x-1}$ *(on rappelle que $\forall x>0,\ x^x=\mathrm{e}^{x\ln x}$)*
3. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{(\mathrm{e}^x-1)\tan^2 x}{x(1-\cos x)}$
4. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x\ln x}{x^2-1}$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}}\right)$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2-1)\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

Travaux dirigés n°2

EXERCICE N°1 :

On considère la fonction notée π, appelée « fonction porte de Dirichlet », définie de la manière suivante : si $x \in [-1;1]$, alors $\pi(x) = \frac{1}{2}$; sinon, $\pi(x) = 0$.

1. Représenter graphiquement cette fonction.
2. Étudier la continuité de π.

EXERCICE N°2 :

On considère la fonction Λ définie de la manière suivante : $\begin{cases} \Lambda(x) = 0 \ si\ x < -1 \\ \Lambda(x) = x+1 \ si\ -1 \leq x \leq 0 \\ \Lambda(x) = 1-x \ si\ 0 < x \leq 1 \\ \Lambda(x) = 0 \ si\ 1 < x \end{cases}$

Reprendre les mêmes questions que dans l'exercice précédent.

EXERCICE N°3 :

On considère la fonction *f* définie pour tout réel x non nul par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

Montrer que *f* se prolonge par continuité en 0 et définir le prolongement par continuité de *f*.

EXERCICE N°4 :

Mêmes questions avec la fonction f définie par $f(x) = \frac{e^{2x}-1}{x}$.

EXERCICE N°5 : On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{e^{2x}-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de *f* sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Quelles conséquences peut-on en tirer concernant la courbe de la fonction *f* ?
3. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2xe^{2x} - e^{2x} + 1$.
    a. Etudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.
    b. En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
    c. Etudier alors les variations de la fonction *f* sur $\mathbb{R}$.
4. Tracer une ébauche de la courbe de *f* en faisant apparaître tous les éléments de votre étude.

EXERCICE N°6 :(non corrigé, à traiter en complément)

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 0$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 1$ sinon.

On rappelle la définition de la fonction « partie entière » : pour tout x réel il existe un unique nombre entier relatif n tel que $n \leq x < n+1$. Ce nombre est appelé partie entière de x et est noté $E(x)$.

Travaux dirigés n°4

Exercice n°1 :

Déterminer les développements limités suivants :

1. $DL_4(0)$ de $f(x)=(x^2+1)\ln(1+x)$
2. $DL_4(0)$ de $f(x)=(1+2x+3x^2)\sin x^2$
3. $DL_3(0)$ de $f(x)=\cos(2x)\sqrt{1+x}$
4. $DL_4(0)$ de $f(x)=e^{x\sin x}$
5. $DL_3(0)$ de $f(x)=\sqrt{1+\sin x}$
6. $DL_6(0)$ de $f(x)=\dfrac{x^2+2}{1+x^3}$
7. $DL_4(0)$ de $f(x)=\dfrac{x}{\sin x}$
8. $DL_5(0)$ de $f(x)=\dfrac{3\sin x}{2+\cos x}$
9. $DL_2(0)$ de $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$

Exercice n°2 :

Déterminer les développements limités suivants :

1. $DL_4(1)$ de $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$
2. $DL_4(1)$ de $f(x)=e^x$
3. $DL_4(+\infty)$ de $f(x)=\dfrac{x^2+3x-4}{x^2+x}$

Exercice n°3 :

A l'aide des développements limités, déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right)$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\cos\dfrac{1}{x}\right]^{x^2}$

Exercice n°4 :

Étudier les branches infinies des fonctions suivantes :

1. $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$
2. $f(x)=\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$
3. $f(x)=e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x(x+2)}$

Exercice n°5 :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-(1-\frac{x}{2})e}{x^2}$.

La fonction f admet-elle un prolongement par continuité en 0 ?

Exercice n°6 :

On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{x^2}{x+2}e^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x\neq 0 \text{ et } f(0)=0.$$

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f.
2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Vous étudierez en particulier l'existence d'une asymptote à la courbe de f ainsi que la position relative de celle-ci par rapport à la courbe de f.
3. Etudier les variations de f.
4. Tracer une ébauche de la courbe de f. On ne déterminera pas la valeur des extremums de f.

Travaux dirigés n°5

Exercice n°1 :

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^1 te^{t^2}dt$
2. $\int_0^1 t^2(t^3+2)^5 dt$
3. $\int_0^1 \frac{t+1}{(t^2+2t+3)^3}dt$
4. $\int_0^1 \sqrt{3t+1}dt$

Exercice n°2 :

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^1 \frac{t+5}{t^2-2t-3}dt$. On pourra écrire la fonction sous la forme : $\frac{t+5}{t^2-2t-3}=\frac{a}{t+1}+\frac{b}{t-3}$
2. $\int_1^2 \frac{4x^2+x-1}{x+1}dx$. On pourra écrire la fonction sous la forme :
$$\frac{4x^2+x-1}{x+1}=ax+b+\frac{c}{x+1}$$
3. $\int_1^2 \frac{4x^4+x^2-1}{x^2(x+1)}dx$. On pourra écrire la fonction sous la forme :
$$\frac{4x^4+x^2-1}{x^2(x+1)}=ax+b+\frac{c}{x}+\frac{d}{x^2}+\frac{e}{x+1}$$
4. $\int_{-1}^0 \frac{2}{(x-1)^2(x^2+1)}dx$. On pourra écrire la fonction sous la forme :
$$\frac{2}{(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{cx+d}{x^2+1}$$

Exercice n°3 :

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^1 (t^2+1)e^{-3t}dt$
2. $\int_1^e 3t\ln t dt$
3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} t^2\cos 2t dt$
4. $\int_0^1 \cos 2\pi t e^t dt$.

Exercice n°4 :

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_0^1 \ln(1+t^2)dt$
2. $\int_1^e \frac{\ln t}{t}dt$
3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3t\cos 2t dt$
4. $\int_0^1 \cos 2\pi t\sin^2 \pi t dt$.
5. $\int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^2}dx$

Exercice n°5 :

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_1^e \frac{\ln t}{t(\ln^2 t+1)}dt$
2. $\int_0^1 \frac{\sqrt{t+2}}{t+1}dt$.
3. $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\arctan x}{x^2}dx$