TD n°2

$\tan'(x) = 1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$u^n = n u' \times u^{n-1}$

Exercice n°1

1) $f(x) = \frac{x^2}{(1-x^3)^2}$ $\qquad \frac{u}{v} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$$= \frac{2x(1-x^3)^2 - (x^2)\,2x(-3x^2)(1-x^3))}{(1-x^3)^4}$$

$$= \frac{2x(1-x^3)[1-x^3+3x^3]}{(1-x^3)^4}$$

$$\boxed{f' = \frac{2x(2x^3+1)}{(1-x^3)^4}}$$

2) $f(x) = x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} + x^2 \times -\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}$

$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$

3) $f(x) = \tan\frac{1-x}{1+x}$

$$f'(x) = \frac{-(1+x)-(1-x)}{1+x^2}\left[1+\tan^2\frac{1-x}{1+x}\right]$$

$$= \boxed{\frac{-2}{(1+x)^2}\left[1+\tan^2\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right]}$$

$f(x) = \sqrt{1+\sin^2 x} = 2\sin x\cos x \times \frac{1}{2\sqrt{1+\sin^2 x}}$

$$= \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} = \frac{\sin 2x}{2\sqrt{1+\sin^2 x}}$$

5) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}}$

$$f'(x) = -\frac{(1+\tan^2 x)(1+\tan x) - (1+\tan^2 x)(1-\tan x)}{(1+\tan x)^2}$$

$$\times \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}}}$$

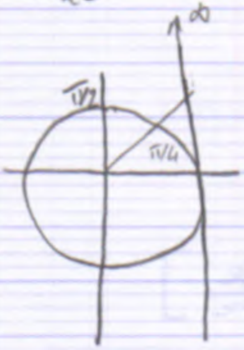
$$= f'(x) = \frac{-2(1+\tan^2 x)}{2(1+\tan^2 x)^2 \sqrt{\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}}}$$

6) $f(x) = \arctan \dfrac{2(1-x)}{2x-x^2}$

$$f'(x) = \frac{-2(2x-x^2) - 2(1-x)(2-2x)}{(2x-x^2)^2} \times \frac{1}{1+\left(\frac{2(1-x)}{2x-x^2}\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2x^2+4x-4}{(2x-x^2)^2} \times \frac{1}{1+\left(\frac{2(1-x)}{2x-x^2}\right)^2}$$

$\dfrac{1}{1+x^2} = \arctan x$



Exercice n°2

$f(x) = \arctan x + \arctan \dfrac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$

$$= \frac{1}{1+x^2} + -\frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{-x^2+1}$$

$\boxed{f'(x) = 0}$ $\Rightarrow f =$ cste

$\lim_{x \to 0} f(x) = \dfrac{\pi}{2}$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{\pi}{2}$

$f(1) = \dfrac{\pi}{2}$

Exercice n°3

$f(x) = \sqrt{\tan x}$ sur $[0, \frac{\pi}{2}[$

- Etude global par intervalle, La composé de fonction dérivable de la fonction est dérivable.

Etude local

f composée de tan et de la fonction racine carrée.

tan : dérivable sur $[0; \frac{\pi}{2}[$; racine carrée : dérivable sur $]0, +\infty[$ or $\tan 0 = 0$

donc f dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ On peut calculer la dérivé d'où $f'(x) = (1+\tan^2 x) \times \frac{1}{2\sqrt{\tan x}} > 0$

x	0		$\pi/2$
$f'(x)$		$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

$f(0) = \sqrt{\tan 0} = 0$

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan x} = +\infty$

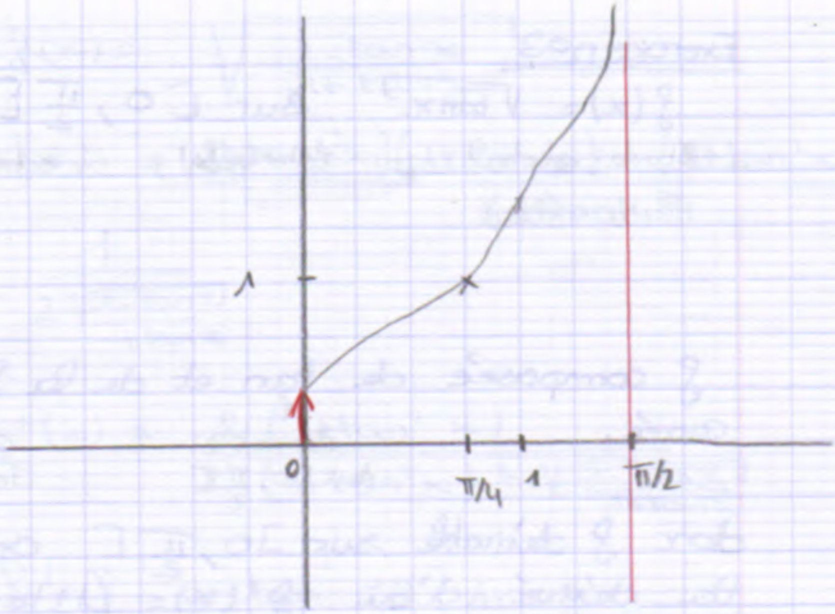
or $\tan 0 = 0$

Dérivabilité en 0 $\frac{f(x) \times f(0)}{x-0} = \frac{\sqrt{\tan x}}{x}$

$= \frac{\sqrt{\frac{\sin x}{\cos x}}}{x} = \sqrt{\frac{\sin x}{x^2 \cos x}} = \sqrt{\frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{x \cos x}}$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x-0} = +\infty \Rightarrow f$ n'est pas dérivable en 0

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$
$f'(x)$		$+$	
f	0	1	$\nearrow$



$f : [0, \frac{\pi}{2}[\longmapsto [0;+\infty[$

$f^{-1}(x) \longleftarrow x \quad f^{-1}$

$f(f^{-1}(x)) = x$

$\sqrt{\tan(f^{-1}(x))} = x$ (on élève au ^{2})

$\tan(f^{-1}(x)) = x^2$

Bijection réciproque

$\boxed{f^{-1}(x) = \arctan x^2}$

$f \; I \to J$
$x \to y$
$\leftarrow f^{-1}$

Exercice n° 4

$f(x) = \arctan \frac{1-x}{1+x} \qquad Df = \mathbb{R} - \{-1\}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1-x}{1+x} = -1$

$\lim\limits_{x \to -1} \arctan x = -\frac{\pi}{4}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\frac{\pi}{4}$

$1 - x \underset{+\infty}{\sim} -x$

$1 + x \underset{+\infty}{\sim} x$

$\frac{1-x}{1+x} \underset{+\infty}{\sim} \frac{-x}{x} = -1$

de même

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -1^+} \dfrac{1-x}{1+x} = +\infty \\ \lim_{x \to +\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2} \end{array}\right\} \text{ donc } \lim_{x \to 1^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

De même $\lim_{x \to -1} f(x) = -\frac{\pi}{2}$

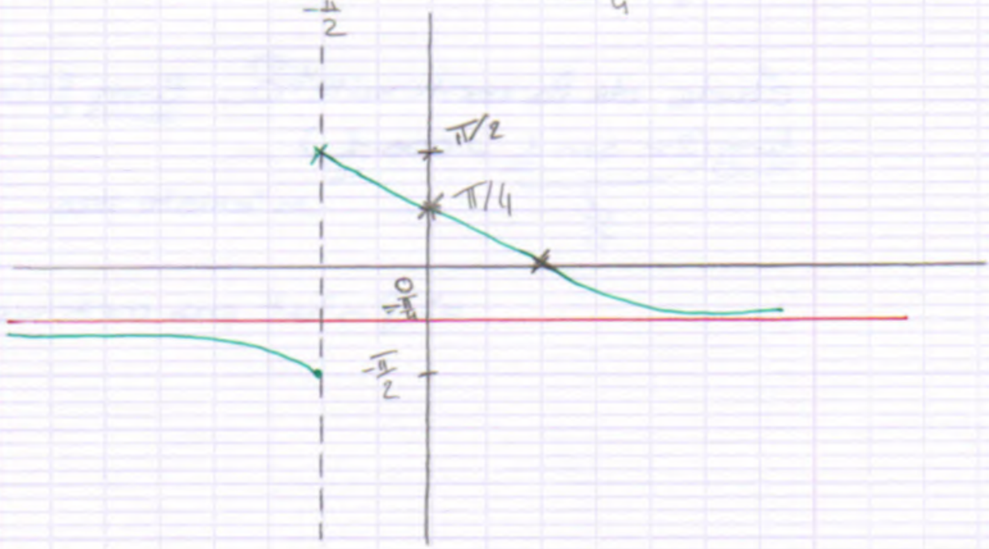
Par composition, f est dérivable sur D_f.

$$f'(x) = \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} \times \frac{1}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}$$

$$= \frac{-2}{(1+x)^2\left[1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2\right]} < 0$$

$\arctan x : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	
f	$-\frac{\pi}{4}$	↘	$-\frac{\pi}{2}$ || $\frac{\pi}{2}$	↘	$-\frac{\pi}{4}$



Exercice n°6

$$\begin{cases} f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0; +\infty[$, f est le produit de fonctions dérivables donc f est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}^*$ $f'(x) \cdot \; 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \times \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}$

$$\boxed{f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}$$

en $0 \rightarrow \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \sin \frac{1}{x}$

si $x > 0$ $\quad -1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$ $\quad$ | si $x < 0$

$-x \leq x \sin \frac{1}{x} \leq x$ $\quad$ | $-x \geq x \sin \frac{1}{x} \geq x$

$\lim\limits_{x \to 0} x = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$

donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$

$$f' : \begin{cases} f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$$

étude de la continuité en 0 $\quad \lim\limits_{x \to 0} f'(x) =$

$\lim\limits_{x \to 0} (\underbrace{2x \sin \frac{1}{x}}_{0} - \cos \frac{1}{x})$

n'existe pas

$\Rightarrow f$ n'est pas continue en 0.