Cours de Fonctions et Variations I
Lionel Pournin - EFREI
TD n°3 : **Continuité**

Exercice 1 : Déterminer la limite en 0 et en $+\infty$ de chacune des fonctions suivantes :

i. $f(x) = x^n 3 + 5$,
ii. $f(x) = x^3 + x + 1$,
iii. $f(x) = \sqrt{x} + 2$,
iv. $f(x) = x^3 - 3 + 1/x$.

Exercice 2 : Dire si les limites suivantes existent et si c'est le cas, donner leur valeur :

i. $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{2}}{x-1}$,
ii. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x(1-x)}{2x^2}$,
iii. $\lim_{x \to 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1}$,
iv. $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 1} - (x+1)$,
v. $\lim_{x \to 9} \frac{x-9}{\sqrt{x} - 3}$,
vi. $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1}$,
vii. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}}$,
viii. $\lim_{x \to -4} \frac{2x}{x+4} + \frac{8}{x+4}$,
ix. $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{e^{x/2} - 1}$,

Exercice 3 : Montrer que toute fonction polynôme est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

Exercice 4 : Montrer que léquation $x + \sin(x) = 1/(x^2+4)$ a au moins une solution dans $[0, \pi]$.

Exercice 5 : Montrer que toute fonction polynôme de degré impair admet au moins une racine réelle.

Exercice 6 : Montrer que les équations suivantes possèdent une solution dans l'intervalle I proposé :

i. $x^{2010} - x^{2009} = 1$ avec $I = [-1, 1]$,
ii. $x^3 + 1 = 3x$ avec $I = [0, 1]$,
iii. $x^{10} + 9x^2 - 4$ avec $I =]0, +\infty[$,
iv. $x^3/(x^2 - 1) = 10$ avec $I = [2, +\infty[$.

Exercice 7 : Déterminez les limites suivantes :

i. $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{x}$,
ii. $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}$,
iii. $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{x}$.

Exercice 8 : Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x} & \text{si} \quad 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2x - \dfrac{4}{3}x^2 & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Montrer que f est continue.

Exercice 9 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3 - x^2}{2} & \text{si} \quad x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad 1 < x \end{cases}$$

Montrer que f est continue.

Exercice 10 : Montrer que l'équation $e^x = 3\sqrt{x}$ a au moins une solution dans $[0, 1]$.

Exercice 11 : Montrer que l'équation $x^2 \cos(x) + x \sin(x) + 1 = 0$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.