TD3

Exercice n°1

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{\tan^2 x} = \dfrac{1-\cos x}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \dfrac{\cos^2 x(1-\cos x)}{\sin^2 x}$

$\sin x \underset{0}{\sim} x$

$\tan x \underset{0}{\sim} x$

$\cos x - 1 \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$

$= \dfrac{\cos^2 x\,(1-\cos x)}{1-\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x\,(1-\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}$

$1-\cos x \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$

$\tan x \underset{0}{\sim} x$

donc $\tan^2 x \underset{0}{\sim} x^2$

donc $\dfrac{1-\cos x}{\tan^2 x} \underset{0}{\sim} \dfrac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$

$\ln x \underset{1}{\sim} x-1$

$e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$

$(1+x)^\alpha \underset{0}{\sim} 1+\alpha x$

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(e^x-1)\tan^2 x}{x(1-\cos x)}$

$e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$

$\tan x \underset{0}{\sim} x \Rightarrow \tan^2 x \underset{0}{\sim} x^2$

$1-\cos x \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$

$\Bigg\}\ f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x \times x^2}{x \times \frac{x^2}{2}} = 2$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \ln x}{x^x - 1}$ $\qquad a^b = e^{b \ln a}$

Sous cette forme qu'on peut trouver la limite.

$f(x) = \dfrac{x^2 \ln x}{e^{x \ln x} - 1}$

Posons $X = x \ln x$, si $x \to 0$, $X \to 0$

$e^{x \ln x} - 1 = e^X - 1$

or $e^X - 1 \underset{0}{\sim} X$

$e^{x \ln x} - 1 \underset{0}{\sim} x \ln x$

$f(x) = \dfrac{x^2 \ln x}{x \ln x} = x$

4) $\lim_{x \to 1} \frac{x \ln x}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}$

$\ln x \underset{1}{\sim} x-1$

donc $f(x) \underset{1}{\sim} \frac{x(x-1)}{x^2-1} = \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)}$

$\ln x \underset{1}{\sim} x-1$

5) $\lim_{x\to+\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right) = x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - 1 + 1 - e^{\frac{1}{x+1}}\right)$

$=$

$x^2 e^{\frac{1}{x}} o \left(1 - \frac{e^{\frac{1}{x+1}}}{e^{1/x}}\right)$

$= e^{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}}$

$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$

$\ln x \underset{1}{\sim} x-1$

6) $\lim_{x\to+\infty} (x^2-1) \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ ($x^2-1 \to +\infty$, $\frac{x+1}{x-1} \to 1$, $\ln \to 0$)

$\frac{x+1}{x-1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{x} = 1$

Posons $X = \frac{x+1}{x-1}$

si $x \to +\infty$, $X \to 1$

$\ln X \underset{1}{\sim} X-1$

$\ln X \underset{1}{\sim} X-1$

$\ln \frac{x+1}{x-1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x+1}{x-1} - 1 = \frac{2}{x-1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{x}$ $\Big\} \Rightarrow (x^2-1)\ln\frac{(x+1)}{x-1} \underset{+\infty}{\sim} 2x$

$x^2-1 \underset{+\infty}{\sim} x^2$

200€

Exercice n°2

Etude locale en 0

$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

$\Delta ; y = x$ tangente à $\mathcal{C}_f$ en $x=0$

$-\frac{x^2}{2} < 0$ courbe de la fonction sera en dessous de la tangente

1) $DL_4(0)$ $f(x) = (x^2+1)\ln(1+x)$

$= (x^2+1)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)$

$= x^3 - \frac{x^4}{2} + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$

$= 0 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{4x^3}{3} - \frac{3x^4}{4} + o(x^4)$

2.) DL_4 $f(x) = (1+2x+3x^2)\sin x^2$

Posons $X = x^2$, si $x \to 0$, $X \to 0$

$\sin X = X - \frac{X^3}{6} + o(X^4)$

$\sin x^2 = x^2 + o(x^4)$

$f(x) = (1+2x+3x^2)(x^2+o(x^4)) = x^2+2x^3+3x^4+o(x^4)$

3) $DL_3(0)$ $f(x) = \cos(2x)\sqrt{1+x}$

Posons $X = 2x$, si $x \to 0$, $X \to 0$

$\cos X = 1 - (\frac{X^2}{2} + o(X^3)$

$\cos 2x = 1 - \frac{4x^2}{2} + o(x^3)$

$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{6}x^3$

$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$

$f(x) = (1 - 2x^2 + o(x^3))\left(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)\right)$

$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - 2x^2 + \frac{1}{16}x^3 - x^3 + o(x^3)$

$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{17}{8}x^2 - \frac{15}{16}x^3 + o(x^3)$

4- DL_4 $f(x) = e^{x \sin x}$

Posons $x \sin x = X$, si $x \to 0$ $X \to 0$

$\sin x \left(x - \frac{x^3}{6}\right)$ $e^X = 1 + X + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{6} + \frac{X^4}{24} + o(X^4)$

$\left(x^2 - \frac{x^4}{6}\right)$ $X = x\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) = x^2 - \frac{x^4}{6} + o(x^4)$

$X^2 = x^4 + o(x^4)$

$X^3 = o(x^4)$

$X^4 = o(x^4)$

$f(x) = 1 + x^2 - \frac{x^4}{6} + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$

$= 1 + x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^4)$

5) $DL_3(0)$ $f(x) = \sqrt{1 + \sin x}$

Posons $X = \sin x$, si $x \to 0$, $X \to 0$

$(1+X)^{1/2} \to 1 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{8}X^2 + \frac{1}{16}X^3 + o(X^3)$

$\sin x = \left(x - \frac{x^3}{6}\right)$

$X = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

$X^2 = x^2 + o(x^3)$

$X^3 = x^3(x^3)$

$f(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$

$f(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{48}x^3 + o(x^3)$

6) DL_6 $\quad f(x) = \dfrac{x^2+2}{1+x^3} = (x^2+2) \times \dfrac{1}{1+x^3}$

① Par composition

$$f(x) = (x^2+2) \times \frac{1}{1+x^3} = (2+x^2)(1-x^3+x^6+o(x^6))$$
$$= 2+x^2-2x^3-x^5+2x^6+o(x^6)$$

Posons $X = x^3$, si $x \to 0$, $X \to 0$

$$\frac{1}{1+X} = 1 - X + X^2 + o(X^2)$$

$$\frac{1}{1+x^3} = 1 - x^3 + x^6 + o(x^6)$$

② Par division suivants les puissances croissantes

$$\begin{array}{r|l} 2+x^2 & 1+x^3 \\ -2+2x^3 & 2+x^2-2x^3-x^5+2x^6+o(x^6) \\ \hline x^2+2x^3 & \\ -x^2+x^5 & \\ \hline -2x^3-x^5 & \\ -(-2x^3-2x^6) & \\ \hline -x^5+2x^6 & \\ -(-x^5) & \\ \hline 2x^6 & \\ -(2x^6) & \\ o(x^6) & \end{array}$$

7) $DL_4(0)$ $\quad f(x) = \dfrac{x}{\sin x} = \dfrac{x}{x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)} = \dfrac{x}{x(1-\frac{x^2}{6}+o(x^3))}$

$$\begin{array}{r|l} x & x-\frac{x^3}{6} \\ -(x-\frac{x^3}{6}) & 1+\frac{x^2}{6}+o(x^3) \\ \hline \frac{x^3}{6} & \\ -(\frac{x^3}{6}) & \\ \hline o(x^4) & \end{array}$$

↑ erreur

$$= \frac{x}{x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)} = \frac{1}{1 \underbrace{-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4)}_{X}}$$

8) $f(x) = x - \dfrac{x^5}{180} + o(x^5)$

faire l'étude locale

$(1+x)^{\frac{1}{x}}$ $\quad \ln x = \frac{1}{x}$

$\ln$

g) $DL_3 \quad f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$

~~$1 + \frac{1}{x} \times x$~~ ⚠ Formule valable que lorsque a est constant.

méthode : l'exposant est une variable, on n'a qu'une famille de ce type $e^X =$

$a^b = e^{b \ln a}$

$f(x) = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$

$\Rightarrow \frac{1}{x}\ln(1+x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1 \neq 0$

Faux

$X = \frac{1}{x}\ln(1+x)$

$e^X = 1 + X + \dots$

⚠ $\Rightarrow f(x) \underset{X \to 0}{=}$ ~~$=$~~ $1 + \left(1 - \frac{x}{2} \dots\right) + \dots$

$f(x) = e^{\underbrace{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)}_{\to 1}}$

$= e^1 \times e^{-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)}$

Soit $X = -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)$

$\lim_{x \to 0} X = 0$

$e^X = 1 + X + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{6} + o(X^3)$

$\Rightarrow f(x) = e\left[1+\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+o(x^3)\right)+\frac{1}{2}\right.$

$+\frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}\right)^2+\frac{1}{6}\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}\right)^3$

$= e\left[1+\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{4}-\frac{2x^3}{6}\right)+\frac{1}{6}\left(-\frac{x^3}{8}\right)\right.$

$= e\left[1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{4}-\frac{x^3}{6}-\frac{x^3}{48}\right]$

$= e\left[1-\frac{x}{2}+\frac{11}{24}x^2-\frac{21}{48}x^3\right]$

$= e-\frac{ex}{2}+\frac{11e}{24}x^2-\frac{21e}{48}x^3+o(x^3)$

$= e-\frac{ex}{2}+\frac{11e}{24}x^2-\frac{7e}{16}x^3+o(x^3)$

8) $f(x) = x-\frac{x^5}{180}+o(x^5)$

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

$y = x$ est tangente à C_f en 0

Si x est proche de 0 et négatif $-\frac{x^5}{180} > 0$ ($\Rightarrow f(x) > x$)

positif $-\frac{x^5}{180} < 0$ $\Rightarrow$ C_f est en dessus de D

C_f est en dessous de D.

Exercice 5

1) $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$

⚠ méthode On pose $h = \frac{1}{x}$ $x = \frac{1}{h}$ $f(x) =$ en f° de h

$\lim_{x \to \pm\infty} h = 0$ $x^3 = \frac{1}{h^3}$

$f(x) = \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{h}\right)^3}{\frac{1}{h} - 1}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{h^3}}{\frac{1}{h} - 1}}$

$= \sqrt{\frac{1}{h^3} \times \frac{1}{\frac{1}{h} - 1}} = \sqrt{\frac{1}{h^2 - h^3}} = \sqrt{\frac{1}{h^2} \times \frac{1}{1-h}}$

$= \sqrt{\frac{1}{h^2}} \times \sqrt{\frac{1}{1-h}} = \frac{1}{|h|}\sqrt{\frac{1}{1-h}}$ $\sqrt{x^2} = |x|$

$f(x) = \frac{1}{|h|}\sqrt{1+h+h^2+o(h^2)}$

$= \frac{1}{|h|} \times \left(1+h+h^2+o(h^2)\right)^{1/2}$

$(1+Y)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}Y + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}Y^2 + o(Y^2)$

$= 1 + \frac{1}{2}Y - \frac{1}{8}x^2 + o(Y^2)$

avec $Y = h+h^2+o(h^2) \xrightarrow[\substack{x \to \pm\infty \\ h \to 0}]{} 0$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{|h|}\left(1 + \frac{1}{2}(h+h^2) - \frac{1}{8}(h+h^2)^2 + o(h^2)\right)$

$= \frac{1}{|h|}\left(1 + \frac{1}{2}h + \frac{3}{8}h^2 + o(h^2)\right)$

$= \frac{1}{|h|} + \frac{1}{2}\frac{h}{|h|} + \frac{3}{8}|h| + o(h)$

$$f(x) = \frac{1}{\left|\frac{1}{x}\right|} + \frac{1}{2}\frac{|x|}{x} + \frac{3}{8}\left|\frac{1}{x}\right| + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= |x| + \frac{1}{2}\frac{|x|}{2} + \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{|x|} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Si $x > 0$ $\quad f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\times\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$

$|x| = x$

l'étude asymptotique il faut un DL2 en h

Si $x < 0$ $\quad f(x) = -x - \frac{1}{2} - \frac{3}{8}\times\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$

$|x| = -x$

interprétation

$D : y = x + \frac{1}{2}$ est asymptotique à Cf en $+\infty$ est Cf est au dessus de D au voisinage de $+\infty$

$\left(\frac{3}{8} * \frac{1}{x}\right) > 0$

$D : y = -x - \frac{1}{2}$ est ——— ——— $-\infty$ est Cf ——— D'

——— en $-\infty$

$\left(\text{Si } x < 0 \quad -\frac{3}{8}\times\frac{1}{x} > 0\right)$

2) $f(x) = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ $\qquad h = \frac{1}{x}$

$\lim_{x \to \pm\infty} h = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{\frac{1}{h}}{1+e^{h}}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{h(1+e^{h})}$ $\qquad \lim_{x\to\pm\infty} h = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$

$\Rightarrow e^{h} = 1 + h + \frac{h^2}{2} + o(h^2)$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{h} \times \frac{1}{1+1+h+\frac{h^2}{2}+o(h^2)}$

⚠ $= \frac{1}{h} \times \frac{1}{2+h+\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{6}+o(h^2)}$ $\not\to 1$ ($h \to 0$)

méthode $= \frac{1}{h} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+\frac{h}{2}+\frac{h^2}{4}+\frac{h^3}{12}+o(h^2)}$

$X = \frac{h}{2}+\frac{h^2}{4}+\frac{h^3}{12}+o(h^3) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$

$\frac{1}{1+X} = 1 - X + X^2 - X^3 + o(X^3)$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2h}\left(1 - \frac{h}{2} - \frac{h^2}{4} - \frac{h^3}{12} + \left(\frac{h}{2}+\frac{h^2}{4}+\frac{h^3}{12}\right)^2 - \left(\frac{h}{2}+\frac{h^2}{4}+\frac{h^3}{12}\right)^3\right)$

$= \frac{1}{2h}\left(1 - \frac{h}{2} - \frac{h^2}{4} - \frac{h^3}{12} + \frac{h^2}{4} + 2\times\frac{h}{2}\cdot\frac{h^2}{4} - \left(\frac{h}{2}\right)^3 + o(h^3)\right)$

$= \frac{1}{2h}\left(1 - \frac{h}{2} + \frac{1}{24}h^3 + o(h^3)\right)$

$= \frac{1}{2h} - \frac{1}{4} + \frac{1}{48}h^2 + o(h^2)$

$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + \frac{1}{48}\cdot\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

$D : y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ est asymptote à C_f en $+\infty$ et $-\infty$

en $+\infty$ et $-\infty$, C_f est en dessus de D.

Exercice n°4

$f(x) = \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to +\infty} - \underbrace{\frac{1}{\sin^2 x}}_{\to +\infty}$

$\sin x \underset{0}{\sim} x$

$\Rightarrow \sin^2 x \underset{0}{\sim} x^2$

~~$f(x) \simeq \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} = 0$~~

on ne peut pas soustraire des équivalents.

$$= \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2}$$

$$= \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 - \frac{2x^4}{6} + o(x^4)}$$

$$= \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 - \frac{2x^4}{6} + o(x^4)}$$

$$= \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)}$$

$$= \frac{1}{x^2} \left(1 - \frac{1}{1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2)} \right)$$

$$= \frac{1}{x^2} \left(\frac{1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2) - 1}{1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2)} \right)$$

$$= \frac{1}{x^2} \frac{-\frac{x^2}{3} + o(x^2)}{1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2)}$$

$$= \frac{-\frac{1}{3} + o(1)}{1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2)}$$

$$\lim_{x \to 0} 1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2) = 1$$

$$\lim_{x \to 0} o(1) = 0$$

$$\Rightarrow \lim f(x) = \frac{-\frac{1}{3} + 0}{1} = -\frac{1}{3}$$