

Exercice 1 : Montrer que la fonction $x \mapsto x$ est dérivable sur \mathbb{R} et donner sa dérivée.

Exercice 2 : En utilisant l'exercice 1, montrer que les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x^3$ sont dérivables et donner leurs dérivées. Montrer ensuite par récurrence que $x \mapsto x^n$ est dérivable et donner sa dérivée pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 : Dériver les fonctions suivantes :

- i. $f(x) = -4x^3 + 2x^2 - 3x + 1$,
- ii. $f(x) = (3x^2 - 4x)/2$,
- iii. $f(x) = (\sqrt{x} + 1)(x^2 - 2)$,
- iv. $f(x) = (2x - \sqrt{x})(x + 4)$,
- v. $f(x) = 1/(1 - 4x)$,
- vi. $f(x) = -3/(2x - 1)$,
- vii. $f(x) = (2x - 1)/(3x + 2)$,
- viii. $f(x) = (3x^2 - 4x + 1)/(2x - 3)$,
- vii. $f(x) = (-5x^2 + 1)^2$.

Exercice 4 : La fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|},$$

est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 5 L'objectif de cet exercice est de trouver la dérivée des fonctions $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \sin(x)$.

- 1) En utilisant les nombres complexes, exprimer $\cos(c + d)$ et $\cos(c - d)$ en fonction de $\cos(c)$, $\cos(d)$, $\sin(c)$ et $\sin(d)$ pour deux réels c et d quelconques,
- 2) En déduire l'expression de $\cos(c - d) - \cos(c + d)$ en fonction de $\sin(c)$ et $\sin(d)$ pour deux réels c et d quelconques,
- 3) En faisant un changement de variables dans l'expression trouvée en 2), calculer $\cos(x) - \cos(a)$ en fonction de $\sin((a + x)/2)$ et de $\sin((a - x)/2)$,
- 4) En déduire que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction suivante admet une limite en a et préciser cette limite :

$$\tau_a(x) = \frac{\cos(x) - \cos(a)}{x - a},$$

- 5) Montrer que la fonction $x \mapsto \cos(x)$ est dérivable sur \mathbb{R} et donner sa dérivée,
- 6) Montrer que la fonction $x \mapsto \sin(x)$ est dérivable sur \mathbb{R} et donner sa dérivée.

Exercice 6 : Calculer les dérivées des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ suivantes :

- | | |
|---|--|
| <ol style="list-style-type: none"> i. $f(x) = \sin(2x + 1)$, ii. $f(x) = 4e^{5x+1}$, iii. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, iv. $f(x) = \sqrt{\cos(x)}$, v. $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$, vi. $f(x) = \sin(x^2)$, | <ol style="list-style-type: none"> vii. $f(x) = \sin^2(x)$, viii. $f(x) = \frac{1}{1 + \tan(x)}$, ix. $f(x) = \left(\frac{1+2x}{1-x}\right)^2$, x. $f(x) = \tan(2x + 3)$, xi. $f(x) = 3e^{3x^2-1}$, xii. $f(x) = \ln(3x^2 - 1)$. |
|---|--|

Exercice 7 : Calculer les dérivées des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ suivantes, et leurs dérivées secondes (c'est-à-dire les dérivées de leurs dérivées) :

- i. $f(x) = \cos(2x)$,
- ii. $f(x) = \tan(x^2)$,
- iii. $f(x) = \ln(2x + 1)$,
- iv. $f(x) = e^{x^2-3}$,
- v. $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$,
- vi. $f(x) = \frac{2x+1}{3x-2}$,
- vii. $f(x) = \sin(ax + b)$ où a et b sont des réels quelconques.

Exercice 8 : Calculer l'expression de la dérivée de $x \mapsto \tan(x)$ en utilisant uniquement les dérivées de \cos et \sin .

Exercice 9 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 2 \ln(x) - x + 1$. Étudier les variations de f et calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Exercice 10 : Soit $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^5 - 5x + 1$. Étudier les variations de f et en déduire que l'équation $x^5 - 5x + 1$ admet trois solutions réelles.

Exercice 11 : Montrer les inégalités suivantes :

- i. $3x < 2 \sin(x) + \tan(x)$ pour tout $x \in]0, \pi/2[$,
- ii. $x/(x + 1) \leq \ln(1 + x) \leq x$ pour tout $x \in]-1, +\infty[$.
- iii. $\sin^2(x) \leq \frac{4}{\pi^2} x(\pi - x)$ pour tout $x \in [0, \pi]$,

Exercice 12 : On considère un entier $n \geq 2$ et la fonction $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x - \cos(x/n)$. Montrer que f_n est strictement croissante sur \mathbb{R} .

Exercice 13 : Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$ est une bijection continue et strictement croissante.

Exercice 14 : Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow]-\pi/2, \pi/2[$ définie par $f(x) = \arctan(x)$ est une bijection continue et strictement croissante.

Exercice 15 : Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[$ définie par :

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|},$$

est une bijection continue et strictement croissante.