TD 5 Ects et variations
1

Exercice 2

c) $U_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}$

$\frac{n+1}{n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{n} = 1$

$X = \frac{n+1}{n}$

si $n \to +\infty$ $\cancel{X = 1}$ $X \to 1$

$\ln X \underset{1}{\sim} X - 1$

$\ln \frac{n+1}{n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n+1}{n} - 1 = \frac{1}{n}$

$n \ln \frac{n+1}{n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{n} = 1$

$\Rightarrow \lim U_n = e \neq 0$
donc STG U_n DV

d) $U_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} = e^{n^2 \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}$

$\frac{n}{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{n} = 1$

$X = \frac{n}{n+1}$, si $n \to +\infty$, $X \to 1$

$\ln X \underset{1}{\sim} X - 1$

$\ln \frac{n}{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{n+1} - 1 = \frac{-1}{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{-1}{n}$

- Critères
- équivalence
- négligeabilité
- comparaison

Règle
- Cauchy $\begin{cases} \text{CV} \\ -1? \\ \text{DV} \end{cases}$
- D'Alembert

$$n^2 \ln \frac{n}{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{-n^2}{n} = -n$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} (-n) = -\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$

Règle de Cauchy

$$\sqrt[n]{u_n} = U_n^{1/n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n^2}{n}}$$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e^{n \ln \frac{n}{n+1}}$$

Or $\ln \frac{n}{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{-1}{n}$

$n \ln \frac{n}{n+1} \underset{+\infty}{\sim} -1$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{U_n} = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow$ STG U_n CV

e) $U_n = \left(\frac{n^2 + n + 1}{n!}\right) 2^n \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^2}{n!} 2^n$

$$U_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{(n+1)^2 \times 2^{n+1}}{(n+1)!} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^2\, 2^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\cancel{n^2}\, 2^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{n^2\, 2^n} = \frac{2}{n+1}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1$$

donc d'après la règle de D'Alembert STG U_n CV

A = −1,5
B = −10
C = −1,6875

d) $U_n = \frac{n^3+n+2}{3^n(n+1)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^3}{n3^n} = \frac{n^2}{3^n}$

$U_{n+1} = \underset{+\infty}{\sim} \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^2}{3^{n+1}}$

$\frac{U_{n+1}}{U_n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^2}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{n^2} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1}{3} < 1$

donc d'après la règle D'alembert,
STG U_n CV

g) $U_n = (n+\frac{1}{2}) \ln(1+\frac{1}{n}) - 1$

$x = \frac{1}{n}$, si $n \to +\infty$, $X \to 0$

$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} X$

$\ln(1+\frac{1}{n}) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

$(n+\frac{1}{2}) \ln(1+\frac{1}{n}) \underset{+\infty}{\sim} n \times \frac{1}{n} = 1 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} U_n = 0$

$\ln(1+x) = X - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

$\ln(1+\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o(\frac{1}{n^3})$

$U_n = (n+\frac{1}{2})(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o(\frac{1}{n^3}) - 1$

$= \cancel{1} - \cancel{\frac{1}{2n}} + \frac{1}{3n^2} + o(\frac{1}{n^2}) + \cancel{\frac{1}{2n}} - \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{6n^3}$

$+ o(\frac{1}{n^3}) \cancel{-1}$

$$U_n = \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \Rightarrow U_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}$$

or STG $\frac{1}{12n^2}$ CV (Rieman avec $\alpha > 1$)

donc STG U_n CV (équivalence)

Calcul de somme

- STG rationnel
- Série exponentielle

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{a^n}{n!} = e^a$$

- Série géométrique : ~~$\sum_{n=0}^{n+\infty} \frac{a^n}{n!} = e^a$~~

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

Exercice 1

a) $U_n = \frac{9}{n(n+1)(n+2)}$

$U_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{9}{n^3}$

STG $= \frac{9}{n^3}$ CV (Rieman avec $\alpha > 1$

donc STG u_n CV (équivalence)

TD 5 (2) Ed et variations

② Calculs des sommes partielles

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k}^{n} \left(\frac{9}{2} \times \frac{1}{k} - 9 \times \frac{1}{k+1} + \frac{9}{2} \times \frac{1}{k+2} \right)$$

$$= \frac{9}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 9 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} + \frac{9}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2}$$

$$= \frac{9}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 9 \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} + \frac{9}{2} \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k}$$

$$= \frac{9}{2} \left[\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} \right]$$

$$- 9 \left[1/2 + 1 \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} \right]$$

$$+ \frac{9}{2} \left[\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right]$$

$$= \left(\frac{9}{2} - 9 + \frac{9}{2} \right) \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} + \frac{27}{4} - \frac{9}{2} - \frac{9}{n+1} + \frac{9}{2} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right)$$

$$S_n = \frac{9}{4} - \frac{9}{n+1} + \frac{9}{2} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right)$$

③ Calcul de la somme

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{9}{4} \quad \text{donc} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{9}{4}$$