

ALGEBRE LINEAIRE – DE n°1**Sans documents ni calculatrice****Questions de cours :**

Enoncer et définir les propriétés d'une base d'un espace vectoriel.

Enoncer le théorème des 4 dimensions.

Enoncer le théorème du rang, et définir le noyau et l'image d'une application linéaire de E dans F.

Exercice n°1 :

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer successivement : $2.A$; $A + {}^t A$; A^2 ; $\text{trace}(A)$;

inverse de A calculé par la méthode d'inversion progressive.

Exercice n°2 :

On considère les 4 vecteurs

$\vec{A} = (1,1,1,1)$, $\vec{B} = (1,-1,-1,1)$, $\vec{C} = (1,3,2,1)$ et $\vec{D} = (0,1,-2,0) \in R^4$. Quelle est la relation linéaire entre ces vecteurs. Donner l'équation du sous-espace vectoriel de R^4 qu'ils engendrent.

Exercice n°3 :

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe des entiers naturels α_n et β_n

tels que $A^n = \alpha_n . A + \beta_n . I$, où I est la matrice unité, $\forall n \in N$. Calculer α_n et β_n en fonction de n.

Exercice n°4 :

On considère l'endomorphisme f de R^4 défini pour tout vecteur de coordonnées (x,y,z,t) par : $f(x,y,z,t) = (x+y, y+z, 2x+5y+2z-t, z+t)$. Quel est le noyau de f ? Donner l'équation et la dimension de l'image de f ? Cet endomorphisme est-il injectif ? surjectif ? bijectif ? Quelle est la matrice A associée à f, quand R^4 est rapporté à sa base canonique ? Quel est le rang de A.

Divertissement : Le gouvernement français constate que le déficit de la balance commerciale de l'année n est toujours égal à celui de l'année n-1 diminué de celui de l'année n-2. En 2006, le déficit était de 10 milliards d'euros ; en 2007, il était de 12 milliards. Quel sera-t-il dans p années après 2007? (heureusement le déficit peut être négatif !!)