

**Questions de cours :**

Enoncer les lois de De Morgan relatives à 2 assertions A et B.

Enoncer les formules d'Euler et la formule de Moivre.

Quelles sont les racines de  $x^3=1$  ?

Définir une application et une bijection d'un ensemble E dans un ensemble F.

Enoncer et définir les propriétés d'une relation d'ordre dans un ensemble E.

Enoncer la formule du binôme de Newton.

Définir la congruence modulo m de 2 entiers.

Quelle est la somme d'une progression géométrique ? d'une progression arithmétique ?

Enoncer les deux formes du théorème de Bezout.

Enoncer le théorème de Gauss relatif à la divisibilité.

Quel est le nombre d'injections d'un ensemble E dans un ensemble F ?

Combien y a-t-il de sous-ensembles dans un ensemble de n éléments ?

Enoncer la formule des « 4 cardinaux ».

Définir la division euclidienne de deux entiers naturels.

Quel est le reste de la division du polynôme P(x) par (x-a) ?

Définir la multiplicité d'ordre k d'une racine a d'un polynôme P(x).

**Exercice n°1**

Soit l'énoncé E :  $\forall a \in \mathbb{R}, \exists ! x \in \mathbb{R} : \ln(x) = a$ . Ecrire sa négation. Quel est l'énoncé exact : E ou sa négation ?

**Exercice n°2**

Soit l'équation  $z^2 + (1+2i)z - 3+11i = 0$  ? Quelles sont, en représentation algébrique, les racines de cette équation, leur produit, leur somme et la somme de leurs inverses ? (indication  $\sqrt{1681} = 41$ ).

**Exercice n°3**

On considère des polynômes en X à coefficients dans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Les coefficients de ces polynômes appartiennent donc au corps  $\mathbb{F}_2$  fini à 2 éléments 0 et 1, muni des lois d'addition modulo 2 et de multiplication.

Effectuer l'addition et la multiplication des polynômes  $P = X^6 + X^4 + X^3 + X$  et  $Q = X^4 + X$ .

Quel est le PGCD de ces deux polynômes ? Déterminer deux polynômes U et V tels que  $P.U + Q.V$  soit égal à ce PGCD.

**Exercice n°4**

On considère la relation  $\rho$  définie dans l'ensemble des parties de E par :

$A \rho B$  si et seulement si  $(A = B \text{ ou } A = \bar{B})$  où  $\bar{B}$  est le complémentaire de B dans E.

Montrer que  $\rho$  est une relation d'équivalence.

**Exercice n°5**

On effectue un lancer de 3 dés, chacun ayant 9 faces comportant un nombre de 1 à 9. Le résultat d'un lancer est formé des 3 nombres obtenus classés par ordre croissant. Combien y a-t-il de résultats différents ? Combien y a-t-il de résultats formés de 3 nombres strictement croissants ? Combien y a-t-il de résultats formés de 3 nombres tous différents ? Combien y a-t-il de résultats comprenant deux (et deux seulement) nombres identiques ? Combien y a-t-il de résultats formés de 3 nombres dont 2 d'entre eux ne sont jamais égaux ni consécutifs ?

**Exercice n°6**

-Soit  $a = 2015$  et  $b = 2011$ . Trouver deux entiers relatifs u et v tels que  $a.u + b.v = \text{pgcd}(a,b)$ . Quel est le reste de la division par 9 de  $b^a$  ?

-Quelle est la factorisation première du nombre 5457375 ? Combien ce nombre a-t-il de diviseurs ?

-Quels sont tous les entiers relatifs x et y tels que  $26x + 15y = 4$  ?