

Sans documents ni calculatrice, ni portable.

Questions de cours :

Enoncer et définir les propriétés d'une relation d'équivalence.

Définir une injection, une surjection et une bijection d'un ensemble E dans un ensemble F.

Quel est le nombre des applications d'un ensemble E dans un ensemble F ? combien sont injectives ?

Enoncer la formule du binôme de Newton.

Définir la division euclidienne de deux entiers naturels.

Définir la congruence modulo m de deux entiers.

Enoncer le théorème de Gauss relatif à la divisibilité.

Exercice 1 :

On considère les ensembles VF des personnes vivant en France, NF des personnes nées en France, et RNIPP des numéros de sécurité sociale attribués par l'INSEE à toutes personnes nées en France et formés de 13 chiffres dont 2 chiffres désignent l'année de naissance. Soit F la correspondance entre une personne et un numéro de sécurité sociale.

F est-elle une application de VF dans RNIPP ? une application de NF dans RNIPP ? une injection ou une surjection de NF dans RNIPP ?

Exercice n°2 :

Chaque livre comporte sur sa dernière page de couverture un numéro d'identification normalisé appelé ISBN (International Standard Book Number) formé, depuis le 1er janvier 2007, de 13 chiffres décimaux. Les 3 premiers chiffres sont 978. Le chiffre suivant est un 2 pour tous les livres édités en zone francophone. Les 8 chiffres suivants désignent alors d'abord l'éditeur puis le numéro du livre chez cet éditeur. Le treizième et dernier chiffre est une clé de contrôle obtenue en calculant le modulo 10 (c'est-à-dire le reste de la division euclidienne par 10) de :

10 moins le modulo 10 de (la somme pondérée de chacun des 12 premiers chiffres, chacun de ces chiffres en position paire (comptée à partir de la gauche) étant préalablement multiplié par 3). Considérons le livre (*très intéressant*) édité en France dont les 8 chiffres désignant l'éditeur et le numéro chez cet éditeur sont 84200886. Quel est son numéro ISBN complet ?

Exercice n°3 :

Combien le nombre 2010 multiplié par 2015 a-t-il de diviseurs entiers naturels ? Quel est le PGCD de 2010 et 2015 ? Quel est le reste de la division par 11 de 2010^{2015} ?

Exercice n°4 :

Vous désirez transporter les 1148 participants au WEI 2011 en remplissant complètement des cars de 34 et 62 places ; combien devez-vous en commander ?

Exercice n°5 :

Combien y a-t-il de nombres formés de 4 chiffres (en base 10, sans 0 à gauche) ? Parmi eux, combien y a-t-il de nombres formés de :

4 chiffres tous distincts ? 4 chiffres croissants au sens large de gauche à droite ? 4 chiffres décroissants au sens large de gauche à droite ? 4 chiffres croissants strictement ? 4 chiffres décroissants strictement ? 4 chiffres dont la somme soit égale à 9 ? 4 chiffres dont 2 (et 2 seulement) sont égaux ?

Exercice n°6 :

Soit E un ensemble et R l'ensemble des relations d'ordres définies sur E. On dit que deux relations d'ordre r et r' appartenant à R sont égales si et seulement si $\forall (x, y) \in E^2, x r y \Leftrightarrow x r' y$ et on dit que r est « plus fine » que r' si et seulement si $\forall (x, y) \in E^2, x r y \Rightarrow x r' y$. Montrer que la relation « plus fine » est une relation d'ordre dans R ; montrer que la relation « égale » appartient à R et est la « plus fine » dans R.

Enigme:

A la mort de leur père, deux frères vendent le troupeau de N moutons dont ils ont hérité, à un prix unitaire curieusement égal aussi à N €. Ils se partagent le produit de la vente de la façon suivante : l'aîné prélève d'abord 10€, puis le cadet prend ensuite 10€. Ils continuent ainsi jusqu'à ce que, au moment de se servir le cadet prend le reste, qui est inférieur à 10 €. Pour rétablir l'équilibre du partage, l'aîné donne alors un couteau au cadet. Combien vaut le couteau ? (indication : il faudra sans doute faire des calculs modulo 10 ou 20 !!!)