EFREI L1 et PL1 **Nombres et Structures**

Corrigé succinct DE n°1 Novembre 2011

Un point de plus pour toute erreur signalée dans le corrigé (pour le premier qui le signale)

Questions de cours : voir cours

Exercice 1 :

Quelles sont, en représentation algébrique, les racines de l'équation :

z^2 - (1+4i)z -5(1-i) = 0 ? Quels sont la somme , le produit et la somme des inverses de ces racines ? Soient A et B les points ayant ces racines pour affixes ; soit C le point d'affixe (-2i); quelle est la nature du triangle ABC?

Le discriminant delta est 5-4i ; en le supposant égal à (a+ib)^2, on aboutit à la bicarrée (☺) a^4-5a^2-36=0, d'où a=+-3 et b=-+2, et racine de delta= +-(3-2i) ; les racines sont donc z1=-1+3i et z2=2+i ; dont la somme est évidemment 1+4i, et le produit est -5+5i; la somme des inverses est (3-5i)/10. On calcule AB^2= 13, BC^2= 13 et AC^2= 26, donc le triangle ABC est rectangle isocèle en B.

Exercice n°2 :

Effectuer la division suivant les puissances croissantes de S= $X-\frac{X^3}{6}+\frac{X^5}{120}$ par C=$1-\frac{X^2}{2}+\frac{X^4}{24}$, à l'ordre 5.

Calcul pénible : S=C.[X+(X^3)/3+(X^5).2/15] + X^6[X.19/360 – X^3/180] ; l'intérêt est de reconnaître ici les 3 premiers termes des développements limités de S, sinus , de C cosinus et Tan comme quotient, à l'ordre 5.

Exercice n°3 :

Trouver un PGCD noté D des deux polynômes à coefficients réels A= $X^{49}+1$ et B= $X^{35}+1$.

Trouver deux polynômes U et V tels que D = A.U + B.V

Par l'algorithme d'Euclide , on trouve D = X^7+1 = A [X^21+X^7] + B [-X^35-X^21+1]

Exercice 4 :

Quel est le reste de la division euclidienne de ($X^{2012}+1$) par (X^2 +1) ?

Le reste est de degré inférieur au degré de X^2+1 ; Donc R(X) = aX+b, avec X^2012+1=(X^2+1).Q(X)+aX+b ; on prend x= i, racine de X^2+1, d'où i^2012+1=ai+b =2 ; donc a=0 et b=2.

Exercice 5 :

*Soit le corps noté **F2** formé des nombres 0 et 1, muni des lois d'addition correspondant au OU exclusif et de multiplication correspondant au ET. On considère les polynômes A(X) et B(X), à coefficients dans ce corps :*

A(X) = $X^6+X^4+X^3+X$ et B(X) = $X^5+X^4+X^3+X^2+X+1$

Effectuer la somme et le produit de ces polynômes. Effectuer la division euclidienne de A(X) par B(X).. Calculer un polynôme D(X), PGCD de A(X) et B(X). Calculer des polynômes U(X) et V(X), appelés coefficients de Bezout, tels que A(X).U(X) + B(X).V(X) = D(X).

A+B = X^6+X^5+X^2+1 ; A.B = X^11+X^10+X^8+X^7+X^5+X^4+X

A=B.(X+1) +X^4+X^3+X+1 ; l'algorithme d'Euclide donne le pgcd = X^3+1 ; avec

X^3+1 = A. X + B. (X^2+X+1)

Enigme :

La Belgique se sépare en deux : la Flandre et la Wallonie ; ces deux nouveaux pays se mettent d'accord pour choisir leurs nouveaux drapeaux composés avec les couleurs Rouge, Vert, Jaune et Noir en appliquant les règles suivantes pour chaque drapeau :

Si il y a du Rouge, il n'y a pas de Jaune ; Si il n'y a pas de Noir, il y a du Vert ; Si il n'y a pas de Jaune, il n'y a pas de Vert ; Si il y a du Jaune, il y a du Noir ; Si il n'y a pas de Vert, il y a du Jaune ; la Flandre a une couleur de plus que la Wallonie. Quelles sont les couleurs des drapeaux de ces deux pays?

On construit la table de vérité pour les 4 variables logiques R, V, J et N. et on indique les valeurs prises par chacune des 5 implications ; on trouve alors que la variable drapeau D ne vaut 1 que pour J.N.Rbarre.Vbarre et J.N.V.Rbarre ;.

Ou , en se souvenant que A=>B est égal à Abarre+B, on écrit le produit des 5 expressions correspondant aux 5 implications ; on développe, on simplifie et on retrouve les mêmes solutions. Donc la Flandre aura le drapeau Jaune, Vert, Noir et la Wallonie le drapeau Jaune et Noir.

Jacques Gualino