Rou Philippe Groupe C. 26/04/2013.

$\frac{7}{20}$ 9

DE Nombres et Structures.

Exercice 1. 0

1) f n'est pas continue $\Rightarrow$ f n'est pas dérivable.

2) Il existe un entier ~~impair~~ qui n'est pas divisible par 4.

Exercice 2. 0

3) $x = \overline{\overline{x \wedge x}}$ donc $\boxed{\cancel{x = \overline{x \uparrow x}}}$

4) $\overline{x \wedge y} = x \uparrow y$ donc $\overline{\overline{x \wedge y}} = \overline{x \uparrow y}$ donc $\boxed{\cancel{x \wedge y = \overline{x \uparrow y}}}$

5) $x \vee y = \overline{\overline{x} \wedge \overline{y}}$ donc $\boxed{\cancel{x \vee y = \overline{x} \uparrow \overline{y}}}$

Exercice 6.

15) $n = 743_{10}$ 0

$743_{10} = \underline{3 + 4 \times 8 + 7 \times 8^2}_8 = \underline{3 + 32 + 448}_8 = \boxed{\cancel{483_8}}$

Exercice 7. 3

~~Partie entière de F = numérateur de F soit $x^4 - x^2 + 1$.~~

16) On remarque que F est de la forme

$$F = \frac{P}{Q}.$$

or $\deg(Q) < \deg(P)$.

On doit donc faire la division euclidienne de P par Q.

$$\begin{array}{r|l}
x^4 - x^2 + 1 & (x+2)^2(x+1) \\
-\ (x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 4x) & \hline x - 5 \\
\hline -5x^3 - 9x^2 - 4x + 1 & \\
-\ (-5x^3 - 25x^2 - 40x - 20) & \\
\hline 16x^2 + 36x + 21. &
\end{array}$$

où $(x+2)^2(x+1) = x^3 + 5x^2 + 8x + 4$

donc $F = x - 5 + \dfrac{16x^2 + 36x + 21}{(x+2)^2(x+1)}$ donc Partie entière de F est $x - 5$.

17)

soit $\dfrac{16x^2 + 36x + 21}{(x+2)^2(x+1)} = \dfrac{a}{(x+1)} + \dfrac{b}{(x+2)} + \dfrac{c}{(x+2)^2}$

Etape 1 : multiplions par $(x+1)$ puis évaluons en (-1) pour déterminer a.

$$\frac{16x^2 + 36x + 21}{(x+2)^2} = a + \frac{b(x+1)}{(x+2)} + \frac{c(x+1)}{(x+2)^2}$$

$$\frac{16(-1)^2+36(-1)+21}{(-1+2)^2} = a.$$

d'où $\boxed{a = 1}$.

Etape 2 : multiplions par $(x+2)^2$ et évaluons en (-2) pour determiner c.

$$\frac{16x^2+36x+21}{x+1} = \frac{a(x+2)^2}{x+1} + b(x+2) + c.$$

$$\frac{16(-2)^2+36(-2)+21}{-2+1} = c.$$

8x+4 $\boxed{c = -13}$

Etape 3, multiplions par $(x+2)$, déterminons b en évaluant en 0 et en remplaça[nt] a et c par les valeurs trouvées.

$$\frac{16x^2+36x+21}{(x+2)(x+1)} = \frac{a(x+2)}{x+1} + b + \frac{c}{x+2}$$

$$\frac{21}{(2)(1)} = \frac{1\times 2}{1} + b - \frac{13}{2}$$

$$\frac{21}{2} = 2 + b - \frac{13}{2}$$

$\boxed{b = 15.}$

donc $\boxed{F = x-5 + \frac{1}{x+1} + \frac{15}{x+2} - \frac{13}{(x+2)^2}}$

Exercice 5. 2

13 $(X^2 - X + 1) = (X + j)(X + \overline{j})$ avec $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

14) $P = (X-1)^{n+2} + X^{2n+1}$

$1 + j^2 + j = 0$ donc $j^2 = -j - 1$.

$P(-j) = (-j-1)^{n+2} + (-j)^{2n+1}$

$= (j^2)^{n+2} + (-j)^{2n+1}$

$= j^{2n+4} + (-j)^{2n+1}$

$= j^{2n+1}(j^3 - 1)$

or $j^3 = 1$.

donc $P(-j) = 0$.

donc P est divisible par $X^2 - X + 1$.

Exercice 4.

7)
$$\begin{array}{r|l} -11 & 7 \\ -(-7) & \hline -1 \\ -4 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 7 & -4 \\ -(4) & \hline -1 \\ 3 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -4 & 3 \\ -(-3) & \hline -1 \\ -1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 3 & -1 \\ -(-3) & \hline 3 \\ 0 & \end{array}$$

~~le PGCD étant le dernier reste non nul,~~

~~PGCD $(-11; 7) = -1$ ou $-11 \wedge 7 = -1$.~~

Exercice 4) 2

8) $a'x + b'y = c'$

$-7x + 11y = -6$.

9) Relation de Bézout liant a' et b' revient à trouver un couple d'entiers relatifs u et v tels que $a'u + b'v = 1$.

$1 = 4 - 3$
$= (11-7) - (7-4)$
$= (11-7) - [7 - (11-7)]$
$= (11-7) - [7 - 11 + 7]$
$= 11 \times 2 - 3 \times 7$.

donc $11 \times 2 - 3 \times 7 = 1$.

$\boxed{(u, v) = (3 ; 2)}$.

10) On a $-7u + 11v = 1$.

Or on cherche $c' = -6$ et non 1.

on multiplie donc le tout par -6.

~~66y = -6~~.

$-7(3 \times (-6)) + 11(2 \times (-6)) = -6$.

$-7(-18) + 11(-12) = -6$

le couple $(x_0 ; y_0) = (-18 ; -12)$ est solution particulière de $(*')$. S

11) donc on a

$$a'(x - x_0) = b'(y_0 - y).$$

$b' \mid (x - x_0)$

$a \wedge b = -1$ et $a' = \frac{a}{a \wedge b}$ donc a' et b' sont premiers entre eux

d'après le lemme de Gauss :

$kb' = x - x_0$.

$x = kb' + x_0$ $k \in \mathbb{Z}$

$x = 11k - 18$ 1

12) $a' \mid (y_0 - y)$

or a' et b' sont premiers entre eux.

d'après le lemme de Gauss,

$ka' = y_0 - y$.

$y = -12 + 7k$. S $k \in \mathbb{Z}$