Nombres et structures L1-PL1, deuxième session 2012-2013, durée 2H.

Corrigé.

Exercice 1

1) Donner la table de vérité de $(X \vee \bar{Y}) \wedge (Y \vee \bar{X})$, on adoptera la présentation suivante pour les valeurs de X et Y dans la table:

X	Y
0	0
0	1
1	0
1	1

$(X \vee \bar{Y}) \wedge (Y \vee \bar{X})$
1
0
0
1

2) De quel connecteur binaire reconnait-on la table?

l'équivalence également appelée la coïncidence ou XNOR

3) Ecrire en français la contraposée de :"si un nombre est multiple de 4 alors il n'est pas premier".

Si un nombre est premier alors il n'est pas multiple de 4.

Exercice 2

4) Ecrire $n = \underline{275}_{10}$ en base 3.

$$n = \underline{101012}_3$$

Exercice 3

On considère l'équation diophantienne $3x + 2y = 5$ que l'on note (*). On note: $a = 3, b = 2$, $c = 5$ et d le PGCD de a et b.

5) Que vaut le PGCD de a et b?

(PGCD de a et b)=1

6) Ecrire l'équation $a'x + b'y = c'$ (*') obtenue en divisant (*) par d.

(') est la même équation que (*)*

7) Donner une relation de Bézout liant a' et b'.

(1)3+(-1)2=1

8) En déduire une solution numérique particulière (x_0, y_0) de (*').
en multipliant par c' on a (x_0, y_0)=(5,-5)

9) Sachant que dans l'égalité $a'(x - x_0) = b'(y_0 - y)$ on a nécessairement $b' \mid (x - x_0)$ (lemme de Gauss) donner l'expression de x en fonction des valeurs numériques des questions précédentes et d'un entier quelconque $k \in \mathbb{Z}$.

x=5+2k

10) Déduisez l'expression de *y* de l'expression de *x* trouvée dans la question précédente.

y=-5+3k

Il y a 2 fois plus de façons d'écrire les solutions que de solutions particulières. Par exemple:

(-5+2k, 10-3k) (1+2k, 1-3k)... et les couples obtenus en changeant k en -k.

Exercice 4

11) Déterminer a et b tels que P(X) = aX^{n+1} + bX^{n} + 1 soit divisible par $(X-1)^2$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

On utilisera le résultat suivant: soient r ∈ $\mathbb{N}^*$ et A ∈ $\mathbb{K}$ [X], si α ∈ $\mathbb{K}$ est racine d'ordre au moins r de A, alors α est racine d'ordre au moins r-1 du polynôme dérivé A'.

Exercice fait en TD

*on ecrit P(1)=0 et P'(1)=0 ce qui donne un système 2*2 dont on tire a=n , b= -1-n*

Exercice 5

12) Effectuer la division euclidienne de $-2X^3+5X^2-1$ par X^2-1.

$-2X^3+5X^2-1 = (X^2-1)(-2X+5)+(-2X+4)$

13) En déduire la partie entière de la fraction $F = \frac{-2X^3+5X^2-1}{X^2-1}$

on divise par X^2-1 *donc la partie entière est* $-2X+5$

14) Décomposer la fraction rationnelle $\frac{-2X+4}{X^2-1}$ en éléments simples.

$\frac{-2X+4}{X^2-1} = \frac{1}{X-1} - \frac{3}{X+1}$

15) En déduire la décomposition de F en éléments simples.

F$= -2X+5+\frac{1}{X-1} - \frac{3}{X+1}$

FIN.