Corrigé succinct du DE nombres et structures L1 2012-2013

Exercice 1 fait en TD.

1) f n'est pas continue ⇒ f n'est pas dérivable.
2) il existe (au moins) un entier pair non divisible par 4(i.e. non multiple de 4).

Exercice 2 fait en TD.

Dans le cours la barre de négation est considérée comme un connecteur unaire, on dit aussi un connecteur d'arité un.

3) $\bar{X} = X \uparrow X$
4) $X \wedge Y = (X \uparrow Y) \uparrow (X \uparrow Y)$
5) $X \vee Y = (X \uparrow X) \uparrow (Y \uparrow Y)$

Exercice 3

6) Une relation binaire est une relation d'équivalence ssi elle est: **réflexive, symétrique et transitive.**
   - la réflexivité s'écrit: $x_2 - x_1 = x_2 - x_1$
   - la symétrie s'écrit: $x_2 - x_1 = y_2 - y_1 \Leftrightarrow y_2 - y_1 = x_2 - x_1$
   - la transitivité s'écrit: $x_2 - x_1 = y_2 - y_1$ et $y_2 - y_1 = z_2 - z_1 \Rightarrow x_2 - x_1 = z_2 - z_1$.

Exercice 4 fait en cours et en TD avec d'autres valeurs numériques.

7) Le PGCD est toujours positif, 7 et -11 sont premiers entre eux leur PGCD est 1. On applique l'algorithme d'Euclide à 7 et 11. Avec l'ordre a=bq+r on a: 11= 7.1+4, 7= 4.1+3, 4= 3.1+1.
8) (*) et (*') sont identiques.
9) 1=4-3.1=(11-7.1)-(7-4.1)=11-7.2+(11-7) d'où 1=2.11-3.7=(-2)(-11)-3.(7), les Bézouts sont (-3, -2).
10) on les multiplie par c'=c=6 d'où (x_0, y_0)=(-18, -12)
11) x= -18+11k , k $\in \mathbb{Z}$

12) y= -12 +7k, k $\in \mathbb{Z}$. Remarque: si l'on change simultanément 11k et 7k en -11k et -7k l'ensemble solution est le même. Certains ont trouvé des solutions particulières sans utiliser les Bézouts qui donnaient (4+11k, 2+7k) , (-7+11k, -5+7k) ou, bien sûr , la même chose en changeant simultanément 11k et 7k en -11k et -7k, elles sont justes et ont été comptées comme telles.

Exercice 5 fait en TD.

13) -j est racine, comme $X^2 - X + 1$ est à coefficients réels $-\bar{j}$ aussi et $X^2 - X + 1$=(X+j)(X+$\bar{j}$)

14) P est à coefficients réels donc si -j est racine, $-\bar{j}$ aussi. On évalue P en -j et on trouve 0 ce qui prouve que P est divisible par (X+j)(X+$\bar{j}$).

Exercice 6 fait en cours.

15) on fait 4 divisions euclidiennes consécutives par 8 et on lit les restes de droite à gauche. 743=$\underline{1347}_8$

Exercice 7 .

16) après développement le dénominateur vaut $x^3 + 5x^2 + 8x + 4$ la division euclidienne du numérateur par le dénominateur donne:
$x^4 - x^2 + 1 = (\mathrm{x} - 5)(x^3 + 5x^2 + 8x + 4) + 16x^2 + 36x + 21$, la partie entière de F est donc $\mathrm{x} - 5$.

17) notons P=$16x^2 + 36x + 21$, la partie polaire de F vaut $\frac{\mathrm{P}}{(x+2)^2(x+1)}$ le dénominateur est scindé donc la décomposition est de la forme $\frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{(x+2)^2}$ comme -1 est pôle simple on utilise la formule du cours $a = \frac{\mathrm{P}(-1)}{(-1+2)^2} = 1$; en multipliant par x et en faisant tendre x vers l'infini on a 16=1+b d'où b=15. Pour c on peut évaluer en 0 ce qui donne 21/4=1+15/2+c/4, soit c= -13.

Exercice 8

18) le théorème de la division euclidienne nous donne $P = (X - a)^2 Q + \alpha X + \beta$, après évaluation en a il vient $P(a) = \alpha a + \beta$.

En dérivant on obtient $P' = 2(X-a)Q \quad + (X-a)^2 Q' + \alpha$, après évaluation en a il vient $P'(a) = \alpha$ dont on déduit β .On connait donc la valeur du reste $R = \alpha X + \beta$.