Nombres et structures L1-PL1, deuxième session 2012-2013, durée 2H.

Documents non autorisés, aucun appareil électronique n'est autorisé y compris la calculatrice.

<u>Toute question dont le numéro aura été changé ne sera pas corrigée. Les parties de la copie rédigées au crayon à papier ne seront pas corrigées.</u>

<u>Il est vivement conseillé d'encadrer les résultats.</u>

Exercice 1

1) Donner la table de vérité de $(X \vee \bar{Y}) \wedge (Y \vee \bar{X})$, on adoptera la présentation suivante pour les valeurs de X et Y dans la table:

X	Y
0	0
0	1
1	0
1	1

2) De quel connecteur binaire reconnait-on la table?
3) Ecrire en français la contraposée de :"si un nombre est multiple de 4 alors il n'est pas premier".

Exercice 2

4) Ecrire $n = \underline{275}_{10}$ en base 3.

Exercice 3

On considère l'équation diophantienne $3x + 2y = 5$ que l'on note (*). On note: $a = 3, b = 2$, $c = 5$ et d le PGCD de a et b.

5) Que vaut le PGCD de a et b?

6) Ecrire l'équation $a'x + b'y = c'$ (*') obtenue en divisant (*) par d. TOURNER SVP.

7) Donner une relation de Bézout liant a' et b'.

8) En déduire une solution numérique particulière (x_0, y_0) de (*').

9) Sachant que dans l'égalité $a'(x - x_0) = b'(y_0 - y)$ on a nécessairement $b' \mid (x - x_0)$ (lemme de Gauss) donner l'expression de x en fonction des valeurs numériques des questions précédentes et d'un entier quelconque $k \in \mathbb{Z}$.

10) Déduisez l'expression de y de l'expression de x trouvée dans la question précédente.

Exercice 4

11) Déterminer a et b tels que $P(X) = aX^{n+1} + bX^{n} + 1$ soit divisible par $(X-1)^{2}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

On utilisera le résultat suivant: soient $r \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathbb{K}[X]$, si $\alpha \in \mathbb{K}$ est racine d'ordre au moins r de A, alors α est racine d'ordre au moins r-1 du polynôme dérivé A'.

Exercice 5

12) Effectuer la division euclidienne de $-2X^3+5X^2-1$ par X^2-1.

13) En déduire la partie entière de la fraction $F = \frac{-2X^3+5X^2-1}{X^2-1}$

14) Décomposer la fraction rationnelle $\frac{-2X+4}{X^2-1}$ en éléments simples.

15) En déduire la décomposition de F en éléments simples.

FIN.