REDA

14

COMBETTE
Elise

PIL
2013

14

Mercredi 28 Mai

DE Nombres et structures

1 – On veut décomposer $F = \dfrac{x}{(x+i)^2(x-i)^2}$. On sait que F sera de la forme

1 $F = \dfrac{a}{x+i} + \dfrac{b}{(x+i)^2} + \dfrac{c}{x-i} + \dfrac{d}{(x-i)^2}$ puisque le degré du numérateur est inférieur à celui du dénominateur, et $c = \bar{a}$ et $d = \bar{b}$ puisque leurs pôles sont conjugués.

* b) On multiplie les deux membres par $(x+i)^2$:

$$\frac{x\cancel{(x+i)^2}}{\cancel{(x+i)^2}(x-i)^2} = a(x+i) + b + \frac{c(x+i)^2}{x-i} + \frac{d(x+i)^2}{(x-i)^2}$$

Puis on évalue en $-i$: $b = \dfrac{-i}{(-2i)^2} = \dfrac{-i}{-4} = \boxed{\dfrac{1}{4}i}$

d'où $d = \bar{b} = \boxed{-\dfrac{1}{4}i}$.

* a) On multiplie les deux membres par $x+i$:

$$\frac{x}{(x+i)(x-i)^2} = a + \frac{b}{x+i} + \frac{c(x+i)}{x-i} + \frac{d(x+i)}{(x-i)^2}$$

Et on fait tendre x vers $+\infty$: $a + c = 0$ donc $a = -c$ (et a et c sont conjugués donc a et c sont des imaginaires purs).

On évalue en 0 l'expression $\dfrac{x}{(x+i)^2(x-i)^2} = \dfrac{a}{x+i} + \dfrac{i}{4(x+i)^2} - \dfrac{a}{x-i} - \dfrac{i}{4(x-i)^2}$:

$\dfrac{a}{i} \cancel{- \dfrac{1}{4}i} + \dfrac{a}{i} \cancel{+ \dfrac{1}{4}i} = 0 \iff \dfrac{2a}{i} = 0$ donc $\boxed{a = c = 0}$

1

Donc $\boxed{F = \dfrac{i}{4(x+i)^2} - \dfrac{i}{4(x-i)^2}}$

2

2- On veut résoudre l'équation $x^n = -1$ avec n entier naturel impair et $x \in \mathbb{C}$, c'est-à dire que l'on cherche les $x = \rho e^{i\alpha}$ tels que $x^n = -1 = e^{i\pi}$.

$$\begin{cases} \rho^n = 1 \\ n\alpha \equiv \pi \ [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \alpha \equiv \frac{\pi}{n} \left[\frac{2\pi}{n}\right] \end{cases}$$

Les solutions de l'équation sont donc $\{e^{i\frac{\pi}{n}}, e^{i\frac{3\pi}{n}}, e^{i\frac{5\pi}{n}}, \dots, e^{i\pi}\}$. Autrement dit, en fonction des racines n-ièmes de l'unité ω^k, $\{\omega^{1/2}, \omega^{3/2}, \dots, \omega^{0}\}$.

Donc $S = \{\omega^k, k \equiv \frac{1}{2} [1]\}$.

3-

4. On calcule le PGCD de 7 et 11 (on divise 11 par 7, puis on poursuit les divisions en prenant le diviseur comme dividende et le reste comme diviseur, jusqu'à obtenir un reste nul) :

$$\begin{array}{r|l} 11 & 7 \\ \hline 4 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 7 & 4 \\ \hline 3 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 4 & 3 \\ \hline 1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3 & 1 \\ \hline \boxed{0} & 3 \end{array}$$

Donc $7 \wedge 11 = 1$.

3

5. On sait que $1 = 4.1 - 3.1$ 3e division de l'algorithme.

$$\begin{aligned} 1 &= 4.1 - \underbrace{3.1} \\ &= 4.1 - (7 - 4.1).1 \\ &= \underbrace{4}.2 - 7.1 \\ &= (11 - 7.1).2 - 7.1 \\ &= 11.2 - 7.3 \end{aligned}$$

Donc la relation de Bézout entre 7 et 11 est $11.2 - 7.3 = 1$.

3

6. On en déduit que $(-18, -12)$ vérifient l'équation $7x_0 - 11y_0 = 6$, on a multiplié les Bézouts par 6.

2

7. D'après le lemme de Gauss, si $a | bc$ et si $a \wedge b = 1$, alors $a | c$. On sait que

$7.(-18) - 11.(-12) = 6 = 7x - 11.y$.

$\iff 7x - 11y = 7(-18) - 11(-12)$

$\iff 7x = 7(-18) - 11(-12) + 11y = 7(-18) - 11(-12 - y)$

2