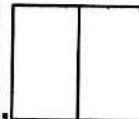
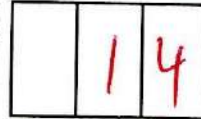


14

REUA

COMBETTE
ElisePIL
2013Mercredi 28 MaiDE nombres et structuresexo 1

1. On veut décomposer $F = \frac{x}{(x+i)^2(x-i)^2}$ on sait que F sera de la forme

$F = \frac{a}{x+i} + \frac{b}{(x+i)^2} + \frac{c}{x-i} + \frac{d}{(x-i)^2}$ puisque le degré du numérateur est inférieur à celui

du dénominateur, et $c = \bar{a}$ et $d = \bar{b}$ puisque leurs pôles sont conjugués.

* (b) on multiplie les deux membres par $(x+i)^2$:

$$\frac{x(x+i)^2}{(x+i)^2(x-i)^2} = a(x+i) + b + \frac{c(x+i)^2}{x-i} + \frac{d(x+i)^2}{(x-i)^2}$$

Puis on évalue en $-i$: $b = \frac{-i}{(-2i)^2} = \frac{-i}{-4} = \frac{1}{4}i$

d'où $d = \bar{b} = -\frac{1}{4}i$.

* (a) on multiplie les deux membres par $x+i$:

$$\frac{x}{(x+i)(x-i)^2} = a + \frac{b}{x+i} + \frac{c(x+i)}{x-i} + \frac{d(x+i)}{(x-i)^2}$$

Et on fait tendre x vers l'infini : $a+c=0$ donc $a=-c$ (et a et c sont conjugués donc a et c sont des imaginaires purs).

on évalue en 0 l'expression $\frac{x}{(x+i)^2(x-i)^2} = \frac{a}{x+i} + \frac{1}{4(x+i)^2} - \frac{a}{x-i} - \frac{1}{4(x-i)^2}$:

$$\frac{a}{i} - \frac{1}{4}i + \frac{a}{i} + \frac{1}{4}i = 0 \Leftrightarrow \frac{2a}{i} = 0 \text{ donc } a=c=0$$

Donc $F = \frac{i}{4(x+i)^2} - \frac{i}{4(x-i)^2}$

2

1

2. On veut résoudre l'équation $z^n = -1$ avec n entier naturel impair et $z \in \mathbb{C}$, c'est-à-dire que l'on cherche les $z = \rho e^{i\alpha}$ tels que $z^n = -1 = e^{i\pi}$.

$$\begin{cases} \rho^n = 1 \\ n\alpha \equiv \pi \pmod{2\pi} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \alpha \equiv \frac{\pi}{n} \pmod{\frac{2\pi}{n}} \end{cases}$$

Les solutions de l'équation sont donc $\{e^{i\frac{\pi}{n}}, e^{i\frac{3\pi}{n}}, e^{i\frac{5\pi}{n}}, \dots, e^{i\pi}\}$. Autrement dit, en fonction des racines n -ièmes de l'unité ω^k , $\{\omega^{1/2}, \omega^{3/2}, \dots, \omega^0\}$.

Donc $S = \{\omega^k, k \equiv \frac{1}{2} \pmod{n}\}$.

3.

4. on calcule le PGCD de 7 et 11 (on divise 11 par 7, puis on poursuit les divisions en prenant le diviseur comme dividende et le reste comme diviseur, jusqu'à obtenir un reste nul):

$$\begin{array}{r|l} 11 & 7 \\ 4 & 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 7 & 4 \\ 3 & 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 4 & 3 \\ 1 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{array}$$

Donc $7 \wedge 11 = 1$.

3

5. on sait que $1 = 4 \cdot 1 - 3 \cdot 1$ 3^e division de l'algorithme.

$$= 4 \cdot 1 - (7 - 4 \cdot 1) \cdot 1$$

$$= 4 \cdot 2 - 7 \cdot 1$$

$$= (11 - 7 \cdot 1) \cdot 2 - 7 \cdot 1$$

$$= 11 \cdot 2 - 7 \cdot 3$$

Donc la relation de Bézout entre 7 et 11 est $11 \cdot 2 - 7 \cdot 3 = 1$.

3

6. on en déduit que $(-18, -12)$ vérifient l'équation $7x_0 - 11y_0 = 6$, on a multiplié les Bézouts par 6.

2

7. D'après le lemme de Gauss, si $a|bc$ et si $a \wedge b = 1$, alors $a|c$. on sait que

$$7 \cdot (-18) - 11 \cdot (-12) = 6 = 7x - 11y.$$

$$\Leftrightarrow 7x - 11y = 7(-18) - 11(-12)$$

$$\Leftrightarrow 7x = 7(-18) - 11(-12) + 11y = 7(-18) - 11(-12 - y)$$

2

