16 T.B

16,

BLOQUET
Romain

PL1
2013

Exercice 1 :

1)

$$\begin{array}{r|l} X^4 + X^2 + X + 2 & X^2 - 3 \\ \hline -(X^4 - 3X^2) & X^2 + 4 \\ \hline 4X^2 + X + 2 & \\ -(4X^2 - 12) & \\ \hline X + 14 & \end{array}$$

2

$Q = X^2 + 4$

$R = X + 14$

Exercice 2 :

2) $F = \dfrac{x^2 - x - 1}{x(X+1)^2} = \dfrac{A}{B}$

Deg A = 2 Deg B = 3 car $X(x+1)^2 = X^3 + 2X^2 + X$.

donc $\text{Deg}\,\dfrac{A}{B} = \text{Deg}\,A - \text{Deg}\,B$

$= -1$

1

2 3) Comme $\text{Deg}\,\dfrac{A}{B} < 0$ la partie entière de F sera nulle

4) $\dfrac{X^2 - X - 1}{X(X+1)^2} = \dfrac{a}{(X+1)} + \dfrac{b}{(X+1)^2} + \dfrac{c}{X}$ 2

5) On Va Commencer a calculer b et c

$$\frac{X^2 - X - 1}{X(X+1)^2} = \frac{a}{(X+1)} + \frac{b}{(X+1)^2} + \frac{c}{X}$$

① on multiplie par $(X+1)^2$.

$$\frac{X^2 - X - 1}{X} = b + \frac{c(X+1)^2}{X}$$

on évalue X en -1.

$$\frac{1 + 1 - 1}{-1} = b$$

$$-1 = b$$

1

② On multiplie par X.

$$\frac{X^2 - X - 1}{(X+1)^2} = \frac{Xb}{(X+1)^2} + c$$

on évalue X en 0.

$$\frac{0^2 - 0 - 1}{(0+1)^2} = c$$

$$c = -1$$

1

③ On peut maintenant Calculer a.

$$\frac{X^2 - X - 1}{X(X+1)^2} = \frac{a}{(X+1)} + \frac{(-1)}{(X+1)^2} + \left(-\frac{1}{X}\right)$$

on évalue X en 1

$$\frac{1 - 1 - 1}{1(1+1)^2} = \frac{a}{1+1} - \frac{1}{(2)^2} + -\frac{1}{1} \iff -\frac{1}{4} = \frac{a}{2} - \frac{1}{4} - 1$$

$$\iff -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{a}{2}$$

$$\iff 2 = a$$

1

Exercice 3:

6).
$$3^2 \equiv -1\,[10]$$
$$(3^2)^6 \equiv (-1)^6\,[10]$$
$$\underline{3^{12} \equiv 1\,[10]}$$

2

Le Chiffre des unité de 3^{12} sera donc égal a 1 d'apres la Congruence modulo 10.

Exercice 4:

7). $157 \wedge 24$:

① $\begin{array}{r|l} 157 & 24 \\ -(144) & 6 \\ 13 & \end{array}$

2

② $\begin{array}{r|l} 24 & 13 \\ -(13) & 1 \\ 11 & \end{array}$

③ $\begin{array}{r|l} 13 & 11 \\ -(11) & 1 \\ 2 & \end{array}$

④ $\begin{array}{r|l} 11 & 2 \\ -(10) & 5 \\ 1 & \end{array}$

PGCD.

⑤ $\begin{array}{r|l} 2 & 1 \\ -(2) & 2 \\ 0 & \end{array}$

8) $1 = 11 - (2)\times 5$ or $2 = 13 - 1\times(11)$

$1 = 11 - 5\times(13 - 1\times(11))$

$1 = 6\times(11) - 5\times(13)$ or $11 = 24 - 13\times 1$.

$1 = 6(24-13) - 5(13)$

$~~1 = -11(\cancel{13}) + 6(24)~~$ et 157 ?

$-143 + 144$

9) Exercice 5 :

On commence par faire la partie réelle.

(X^2+X) On peut voir que -1 est racine car $(-1^2-1)=0$.
Donc d'après le théorème fondamentale de l'arithmétique :

$$\begin{array}{r|l} X^2+X & X+1 \\ \hline -(X^2+X) & X \\ 0 & \end{array}$$

donc $P(x) = X(X+1)(X-j)^2(X-\bar{j})^2$.

<u>On développe maintenant la partie complexe.</u>

$(X-j)^2 = (X-j)(X-j) = X^2 - 2jX + \bar{j}$

$(X-\bar{j})^2 = (X-\bar{j})(X-\bar{j}) = X^2 - 2\bar{j}X + j$

$(X^2-2jX+\bar{j})(X^2-2\bar{j}X+j) = (X^4-2\bar{j}X^3+jX^2)+(-2jX^3+4X^2-2X\bar{j})+$
$(X^2\bar{j}-2Xj+j\bar{j})$

$= X^4 - 2X^3(\bar{j}+j) + X^2(j+\bar{j}) + 4X^2 - 2X(\bar{j}+j) + 1$
$= X^4 + 2X^3 - \ X^2 + 4X^2 + 2X + 1$
$= X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1$

La décomposition du Polynôme $P(X)$ en facteur irréductible sur $\mathbb{R}$ est donc :

$$\underline{P(X) = X(X+1)(X^4+2X^3+3X^2+2X+1)}$$

Exerci 6 :

10) On cherches les racine carrées complexe du nombre $-3+4i$ de la forme $(x+iy)^2 = x^2 + i2xy - y^2$
$= x^2 - y^2 + i2xy$

BLOQUET
ROMAIN
PL1.

On identifie $x^2 - y^2 = -3$ et $2xy = 4$

On Calcul le module $|w| = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2}$

$= \sqrt{9 + 16}$

$|w| = 5$

On pose le Système : $\begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$

2

On identifie $X = x^2$ et $Y = y^2$

$\begin{cases} X - Y = -3 \\ X + Y = 5 \end{cases}$ par somme $2X = 2 \iff X = 1$

par soustraction $2Y = 8 \iff Y = 4$.

$x^2 = 1$ donc $x = 1$ ou $x = -1$

$y^2 = 4$ donc $y = 2$ ou $y = -2$.

Il semblerait il y avoir quatres couples solutions mais seulement deux sont possibles car $2xy > 0$.

donc les deux couples solution son $S = (x = 1, y = 2)$ et $S = (x = -1, y = -2)$

les racines carrées de $-3+4i$ ~~est~~ Sont donc $\cancel{(1+2i)^2}$ et $\cancel{(-1-2i)^2}$.

Verifications : $(1+2i)^2 = 1 + 2 \times 2i \times 1 + 4i^2$

$= 1 + 4i + (-4)$

$= 4i - 3$

$= -3 + 4i$