Nombres et structures DE L1 2013-2014, durée 2H.

CORRIGE

Exercice 1 fait en amphi

1) quel est le PGCD de $x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$ et $x^3 + x^2 - x - 1$?

   le dernier reste non nul de l'algorithme d'Euclide est $-\frac{3}{4}(x+1)$ *donc le pgcd est* $x+1$.

Exercice 2 fait au td3

Soit le nombre complexe $\alpha = \sqrt{3} + i$.

2) déterminer $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha^n \in \mathbb{R}$.

$\alpha = 2e^{i\pi/6}$ *donc* $\alpha^n = 2^n e^{in\pi/6}$. α^n *réel* $\Leftrightarrow \frac{n\pi}{6} = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. *Les n solutions sont les multiples de 6 i.e.* $6\,\mathbb{Z}$.

3) déterminer $n \in \mathbb{Z}$ tel que α^n soit imaginaire pur.

   la partie réelle de α^n *est* $\cos\frac{n\pi}{6}$, *sa nullité donne* $\frac{n\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, *l'ensemble solution s'écrit* $3+6k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 3 fait en amphi

Soit $P(x) = x^4 - 1$

4) donner sa décomposition en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}$.

$$x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x-i)(x+i)$$

5) donner sa décomposition en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$.

$$x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)$$

Exercice 4 fait en amphi

Soit $P(x) = x^6 + x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 3x^2 + x + 1$

6) calculer $P''(x)$.

$$P''(x) = 30x^4 + 20x^3 + 36x^2 + 12x + 6$$

7) que vaut P"(i)?

P"(i)= -8i

8) on admet que $\mathrm{P(i)} = \mathrm{P'(i)} = 0$, quelle est la multiplicité de i?

i est racine double

9) pourquoi $-\mathrm{i}$ est-il aussi racine de même multiplicité?

car P est à coefficients réels donc puisque i est racine son conjugué l'est aussi

10) on admet que P est divisible par $\mathrm{x}^2 + \mathrm{x} + 1$, donner sa décomposition en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}$.

P est de degré 6 et on sait qu'il est divisible par $(x-i)^2(x+i)^2$ *et* x^2+x+1 *(qui sont premiers entre eux , je n'exigeais pas cette justification)*

$$P = (x-i)^2(x+i)^2(x-j)(x-\bar{j})$$

11) donner sa décomposition en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$.

il suffit d'effectuer les produits $(x-j)(x-\bar{j})$ *et* $(x-i)(x+i)$*:*

$P = (x^2+1)^2(x^2+x+1)$

Exercice 5 fait en amphi

On considère la fraction F = $\dfrac{\mathrm{x}^3-\mathrm{x}-1}{\mathrm{x(x+1)}}$.

12) quelle est sa partie entière?

la division euclidienne donne $x^3 - x - 1 = (x-1).x(x+1) - 1$

la partie entière vaut donc $x - 1$

13) quelle est sa partie polaire?

$$\frac{-1}{x(x+1)}$$

14) décomposer sa partie polaire en éléments simples.

c'est le cas le plus simple de tout le cours!

$$\frac{-1}{x(x+1)} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x+1}$$

Exercice 6 fait en amphi

On rappelle que si α est un pôle simple de la fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$, le coefficient de la partie polaire relative à α vaut $\frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}$.

Soit F = $\frac{1}{x^n - 1}$.

15) combien F a-t-elle de pôles distincts ?

l*es pôles sont les racines nièmes de l'unité il y en a n.*

16) on pose $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ et on considère un indice k tel que $0 \leq k \leq n-1$. Donner la décomposition de F en éléments simples complexes en fonction de ω, n et k.

l'application de la formule donnée dans l'énoncé donne le coefficient associé au pole ω^k *qui vaut* $\frac{\omega^k}{n}$ *d'où* $F = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega^k}{x-\omega^k}$.

FIN.