NOM Lellouche

Prénom Léo

Promo 2020

Date 05/01/16

LELLOUCHE Léo
L1 - 2015

0 1

MATIÈRE Nombres et structures $\frac{10}{20}$

Exercice 2 :

$f(x) = x^4 + 3$

Donc $y = x^4 + 3$

Pour obtenir les antécédents de y, il faut isoler x :

$y = x^4 + 3 \iff y - 3 = x^4 \iff \sqrt[4]{y-3} = x$

Donc les antécédents de y par f sont : $\boxed{\sqrt[4]{y-3}}$ 2

Exercice 4 :

q_1	q_2	r	d
30	7	2	4
7	2	$\boxed{1}$	3
2	1	0	2

$30 \mid 7$
$-28 \mid 4$
2

$7 \mid 2$
$-6 \mid 3$
$\boxed{1}$

$2 \mid 1$
$-2 \mid 2$
0

2

Le PGCD est le dernier reste non nul obtenu.

Donc le $\boxed{\text{PGCD de 30 et 7 est 1}}$.

On peut donc conclure que $\boxed{\text{30 et 7 sont premiers entre eux}}$.

Exercice 7 :

$5040 = 1 \times 2 \times 2520$

$= 1 \times 2 \times 2 \times 1260$

$= 1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 630$

$= 1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 315$

$= 1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 105$

$= 1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 35$

$= 1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$ 1.

$\boxed{5040 = 1 \times 2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7}$

Donc 5040 a 40 diviseurs dans $\mathbb{N}$ 0

Exercice 8 :

$$\frac{x}{x^2+x+1} = \frac{x}{\left(x+\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)}$$ 1

$$= \frac{x}{\left(x+e^{-\frac{i\pi}{3}}\right)\left(x+e^{\frac{i\pi}{3}}\right)}$$

$$\frac{x}{\left(x+e^{-\frac{i\pi}{3}}\right)\left(x+e^{\frac{i\pi}{3}}\right)} = \frac{A}{x+e^{-\frac{i\pi}{3}}} + \frac{B}{x+e^{\frac{i\pi}{3}}}$$

$$\frac{x\cancel{\left(x+e^{-\frac{i\pi}{3}}\right)}}{\cancel{\left(x+e^{-\frac{i\pi}{3}}\right)}\left(x+e^{\frac{i\pi}{3}}\right)} = A + \frac{B\left(x+e^{-\frac{i\pi}{3}}\right)}{x+e^{\frac{i\pi}{3}}}$$

Si $x \to -e^{-\frac{i\pi}{3}}$, $\dfrac{B\left(x+e^{-\frac{i\pi}{3}}\right)}{x+e^{\frac{i\pi}{3}}}$ tend vers 0

Donc $A = \dfrac{e^{-\frac{i\pi}{3}}}{-e^{-\frac{i\pi}{3}}+e^{\frac{i\pi}{3}}}$

$$= \frac{\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}}{i\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\left(-i\sqrt{3}\right)}{\left(i\sqrt{3}\right)\left(-i\sqrt{3}\right)}$$

$$= \frac{-\frac{i\sqrt{3}}{2}+2}{4}$$

2 $$= \frac{i\sqrt{3}}{8}+\frac{1}{2}$$

De même $B = \dfrac{i\sqrt{3}}{8}+\dfrac{1}{2}$

Donc $$\boxed{\frac{x}{x^2+x+1} = \frac{\frac{i\sqrt{3}}{8}+\frac{1}{2}}{x+e^{-\frac{i\pi}{3}}} + \frac{\frac{i\sqrt{3}}{8}+\frac{1}{2}}{x+e^{\frac{i\pi}{3}}}}$$

Exercice 9 :

$x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$

$\boxed{= (x+1)(x-1)(x+i)(x-i)}$ 2

Exercice 3 :

$f(x) = x^4 + 3$

Une fonction est injective si chaque element de l'ensemble d'arrivé possède au moins 1 antecedant.

On sait que x^4 est continu sur $\mathbb{R}^-$.

$\lim_{x \to -\infty} x^4 = +\infty \qquad \lim_{x \to 0} x^4 = 0$ 1

Donc d'après le theorème de valeurs intermediaires, x^4 prend toutes les valeurs entre 0 et $+\infty$.
x^4 est donc injective ~~de~~ $\mathbb{R}^-$ dans $\mathbb{R}^+$ car elle prend toutes les valeurs de $\mathbb{R}^+$ au moins une fois.

Par raisonnement analogue, x^4 est aussi ~~injective~~ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$.

Donc x^4 est injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$.

Ici, x^4+3 ne prend pas se valeurs mais dans $[3, +\infty[$.

Donc x^4+3 est injective de $\mathbb{R}$ dans $[3, +\infty[$

NOM Lellouche

Prénom Leo

Promo 2020

Date 05/01/16

MATIÈRE Nombres et structures

Excercice 1 :

$$U_{n+2} = (4-2i)U_{n+1} + (-3+4i)U_n$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 = (4-2i)x - 3 + 4i$$

0