NOM M'BARKI

Prénom Sabri

Promo 2020 (L1).

Date 5/01/16.

M'BARKI Sabri
L1 - 2015

15

MATIÈRE Nombres et structures.

1) 3 $U_{n+2} = (4-2i)U_{n+1} + (-3+4i)U_n$.

~~Changeons les variables~~ considérons $x^2 - (4-2i)x + 3 - 4i = 0$.

$x^2 + ((-4)+2i)x + 3 - 4i = 0$.

$\Delta = ((-4)+2i)^2 - 4(3-4i)$

$= 16 - 16i - 4 - 12 + 16i$

$\Delta = 0$

$r_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{4-2i}{2} = 2-i$

~~$x^2 - y^2 = Re(\Delta) = 28$.~~

~~$x^2 + y^2 = |\omega| = \sqrt{1808} = 4\sqrt{113}$.~~ On sait que si $\Delta = 0$ on a :

$E = \{(\lambda + \mu n) r_0^n$, avec $n \in \mathbb{R}, \lambda, \mu \in \mathbb{Z}^2\}$.

$U_n = (\lambda + \mu n) r_0^n$

$U_0 = \frac{1}{2} = (\lambda + \mu \times 0) \times (2-i)^0$

$\frac{1}{2} = \lambda$.

$U_1 = (2-i) = (\lambda + \mu \times 1)(2-i)$.

$\frac{2-i}{2-i} = (\lambda + \mu)$

$1 = \frac{1}{2} + \mu$.

$\mu = \frac{1}{2}$.

On a donc $U_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{n}{2}\right)(2-i)^n$

2

4)

$$\begin{array}{r|l} 30 & 7 \\ -28 & 4 \\ \hline 2 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 7 & 2 \\ -6 & 3 \\ \hline 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 1 \\ -2 & 2 \\ \hline 0 & \end{array}$$

Le dernier reste non nul est 1 donc le PGCD de 30 et 7 est 1.

$30 \wedge 7 = 1$.

5) On sait que : $1 = 7 - 2 \times 3$ et $\exists\, u, v$, $au + bv = 1$ si a et b sont premiers

2

$$1 = 7 - (30 - 7 \times 4) \times 3.$$

$$1 = 7 \times 13 + 30 \times (-3)$$

On a donc un couple $(u;v) = (13;-3)$

pour $(a;b) = (30;7)$.

6) On sait que si $a \wedge b = 1$ $\exists\, au + bv = 1$.

2

et que l'on peut écrire : $a(u - u_0) = -b(v - v_0)$.

se qui implique du fait que $a \wedge b = 1$.

et $a \mid (v - v_0)$.

$b \mid (u - u_0)$

on a donc

$7 \mid (v+3)$.

et $30 \mid (u - 13)$.

$7k = v + 3$. $\Rightarrow$ $7k - 3 = v$

$30k = u - 13$. $\quad$ $30k + 13 = u$

L'ensemble de tous les couples de coefficient de Bézout pour $(a;b) = (30;7)$ est $S : \{30k + 13 ; 7k - 3,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

7) $5040 = 504 \times 10$

3

$= 56 \times 9 \times 10$

$= 7 \times 8 \times 9 \times 10$

$= 2^3 \times 7 \times 3^2 \times 2 \times 5$

$5040 = 2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7$

Le nombre de diviseur est égale à : $(1+4)(1+2)(1+1)(1+1) = 5 \times 3 \times 2^2$
$= 60$

5040 à donc 60 diviseurs.

1 8) $C = \frac{x}{x^2+x+1} = \frac{x}{(x-j)(x-\bar{j})} = \frac{A}{x-j} + \frac{B}{x-\bar{j}}$

Car $(x-j)(x-\bar{j}) = x^2 - x e^{-i\frac{2\pi}{3}} - x e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^0$

$= x^2 - x\left(e^{-i\frac{2\pi}{3}} + e^{i\frac{2\pi}{3}}\right) + 1$

$= x^2 - x\left(2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) + 1$

$= x^2 - x\left(2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)\right) + 1$

$= x^2 + x + 1$

~~ainsi~~ on multiplie par $(x-\bar{j})$.

$$\frac{x}{x-j} = \frac{A(x-\bar{j})}{x-j} + B$$

$$B = \frac{\bar{j}}{\bar{j}-j} = \frac{e^{i\frac{4\pi}{3}}}{e^{i\frac{4\pi}{3}} - e^{i\frac{2\pi}{3}}}$$

Si $e^{i\theta} - e^{i\varphi} = 2\cos\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right) e^{\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)}$ car $e^{i\theta} - e^{i\varphi} = 2\cos\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right) e^{\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)}$.

on a. $B = \frac{e^{i\frac{4\pi}{3}}}{2\cos(\pi)\, e^{\frac{\pi}{3}}} = \frac{e^{i\frac{4\pi}{3}}}{-2e^{\frac{\pi}{3}}} = -\left(\frac{e^{i\frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{3}}}{2}\right)$

Ceci ne paraît pas cohérent.

9) On sait que $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

2

on a : $x^4 - 1 = {x^2}^2 - 1^2$

$= (x^2 - 1)(x^2 + 1)$

$= (x-1)(x+1)(x^2+1)$.

On cherche un résultat dans $\mathbb{C}$ on sait que $i^2 = -1$.

et que $-(-1) = +1$.

on peut donc conclure :

$(x^2+1) = x^2 - (-1)$

$= x^2 - i^2$

$= (x-i)(x+i)$.

$\Rightarrow x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x-i)(x+i)$.

0 2) si $f(x) = x^4 + 3$. on a : $y = x^4 + 3$.

si $x = 3$ on a $y = 81 + 3 = 84$.

Comme $x \in [3 ; +\infty[$ et que $x^4 + 3$ est strictement croissante

on a : ~~$y \in [84 ; +\infty[$~~.

les antécédent par $f = \{ [$