Nombres et structures DE L1 2015-2016.

1H45, documents non autorisés, aucun appareil électronique n'est autorisé y compris la calculatrice.

Toute question dont le numéro aura été changé ne sera pas corrigée. Les parties de la copie rédigées au crayon à papier ne seront pas corrigées. Il est vivement conseillé d'encadrer les résultats.

1) Trouver la suite (u_n) qui vérifie $u_{n+2} = (4-2i)u_{n+1} + (-3+4i)u_n$ et les conditions initiales $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_1 = 2 - i$.

2) Soit $f: \mathbb{R} \to [3, +\infty[\ , x \to x^4 + 3$. Soit $y \in [3, +\infty[$, quels sont ses antécédents par f?

3) f est-elle injective? (vous justifierez votre réponse par un raisonnement portant sur des éléments des ensembles de départ et d'arrivée).

4) Calculer le pgcd de 30 et 7 grâce à l'algorithme d'Euclide, (il faut que toutes les divisions euclidiennes figurent sur votre copie et soient justes pour avoir les points de cette question).

5) A l'aide des relations de récurrence suivantes :

$$q_{i+1} = r_{i-1} \div r_i$$
$$r_{i+1} = r_{i-1} - q_{i+1}r_i$$

$$u_{i+1} = u_{i-1} - q_{i+1}u_i$$
$$v_{i+1} = v_{i-1} - q_{i+1}v_i$$

et de l'initialisation: $r_0 = 30,\ r_1 = 7, u_0 = 1, u_1 = 0, v_0 = 0, v_1 = 1$, calculer un couple de coefficients de Bézout pour $(a, b) = (30,7)$.

6) Utiliser la réponse à la question ~~6)~~ 5) pour donner l'ensemble de tous les couples de coefficients de Bézout pour $(a, b) = (30,7)$.

7) Donner la décomposition de 5040 au sens du théorème fondamental de l'arithmétique et déduisez-en le nombre de ses diviseurs entiers naturels.

8) Décomposer en éléments simples de première espèce la fraction suivante (dénominateur non scindé sur $\mathbb{R}$, 2 pôles simples conjugués) : $C = \frac{x}{x^2+x+1}$.

9) Donner la décomposition de $x^4 - 1$ en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{C}$.

$(x+1)(x-1)(x+i)(x-i)$

FIN.