Nombres et structures DE PL1 2016-2017.

1h45, documents non autorisés, aucun appareil électronique n'est autorisé y compris la calculatrice.

Toute question dont le numéro aura été changé ne sera pas corrigée. Les parties de la copie rédigées au crayon à papier ne seront pas corrigées.

Il est vivement conseillé d'encadrer les résultats.

Soit $F = \frac{x^2-x-1}{x(x+1)^2}$

1) Donner la forme de la décomposition en éléments simples de F.
2) Calculer les coefficients de cette décomposition.

---

3) Mettre les quatre complexes $\pm\sqrt{3} \pm 3i$ sous forme polaire, avec des arguments dans $[0,2\pi[$.

---

4) Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$, simplifier au maximum l'expression $(\omega + \omega^4)(\omega^2 + \omega^3)$.

---

5) Montrer que: pour tout nombre $Z \in \mathbb{C}\backslash\{1\}, \frac{Z^4-1}{Z-1} = (Z+1)(Z-i)(Z+i) = Z^3 + Z^2 + Z + 1$.
6) En déduire les solutions de l'équation : $\left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)^3 + \left(\frac{z-2i}{z+2i}\right)^2 + \left(\frac{z-2i}{z+2i}\right) + 1 = 0$ dans $\mathbb{C}$.

7) Quel est le chiffre des unités de 3^{12} ? Vous justifierez votre résultat à l'aide d'une congruence modulo 10.

8) Déterminer $157 \wedge 24$ grâce à l'algorithme d'Euclide.

FIN.

1) $F = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2} = \frac{x^2-x-1}{x(x+1)^2}$

2) Le coef d'indice max est c : $\frac{x^2-x-1}{x} = (x+1)^2\left(\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}\right)$
on évalue en -1. $\frac{1+1-1}{-1} = -1 = c$

0 est pôle simple $a = \frac{P(0)}{Q'(0)}$ avec $Q'(x) = \frac{d}{dx}(x^3+2x^2+x)$

$Q'(x) = 3x^2+4x+1$, $P(0) = -1$ $Q'(0) = 1$ $a = -1$

Choix pour le dernier coef : - soit $\lim\limits_{x \to +\infty}$
- soit évaluer en 1

Evaluation en 1 $\frac{x^2-x-1}{x(x+1)^2} = \frac{-1}{x} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{a}{x+1}$

en 1 : $\frac{-1}{\cancel{4}} = -1 - \frac{1}{\cancel{4}} + \frac{a}{2}$

$\frac{a}{2} = 1$ $b = 2$

$\frac{x(x^2-x-1)}{x(x+1)^2} = \frac{-x}{(x+1)^2} - \frac{x}{x} + \frac{ax}{x+1}$

quand $x \to +\infty$ $1 = 0 - 1 + a$

3) On trouve les $\rho e^{i\theta}$ suivant avec $[\theta \in [0, 2\pi]$
$2\sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{3}}$, $2\sqrt{3}\, e^{2i\frac{\pi}{3}}$, $2\sqrt{3}\, e^{i4\frac{\pi}{3}}$, $2\sqrt{3}\, e^{i5\frac{\pi}{3}}$

4) $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}$ ω est racine 5ème de l'unité $\omega^5 = \left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^5 = e^{i2\pi} = 1$

$\omega^5 = 1$ On développe $(\omega+\omega^4)(\omega^2+\omega^3) = \omega^3+\omega^4+\omega^6+\omega^7$
oui mais $\omega^5 = 1$

$(\omega+\omega^4)(\omega^2+\omega^3) = \omega^3+\omega^4+\omega+\omega^2$ or $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4 = 0$

d'où $(\omega+\omega^4)(\omega^2+\omega^3) = -1$

5) $\frac{z^4-1}{z-1} = \frac{(\cancel{z-1})(z+1)(z^2-1)}{(\cancel{z-1})} = (z+1)(z^2-1) = (z+1)(z-i)(z+i)$
$= (z^2 - zi + z - i)(z+i)$

$= (z^2 + z(-i+1) - i)(z+i)$
$= z^3 + z^2 i + z^2(-i+1) + zi(-i+1) - zi + 1$
$= z^3 + \cancel{z^2 i} - \cancel{z^2 i} + z^2 + z + \cancel{zi} - \cancel{zi} + 1$

$= z^3 + z^2 + z + 1$

6) On pose $Z = \frac{z-2i}{z+2i}$ d'après 5) $Z \in \{-1, i, -i\}$

On doit résoudre $Z = -1$, $Z = i$, $Z = -i$

- $Z = i \iff z - 2i = i(z+2i) \iff z(1-i) = -2+2i$
  $= 2(-1+i)$

  $\frac{2(-1+i)}{1-i} = -2$

- $Z = -i \iff z - 2i = -i(z+2i) \iff z(1+i) = 2+2i$

  $\frac{2(1+i)}{1+i} = 2 = z.$

- $Z = -1 \iff z - 2i = -(z+2i) \iff z - 2i = -z - 2i \iff z = -z \iff z = 0$

  $S = \{0, 2, -2\}$

7) $3^{12}, 3^{12} (3^4)^3$ $\quad 3^4 = 81 = 1 [10]$ donc $3^{12} = 1^3 = 1 [10]$

8)
$$\begin{array}{r|l} 24 & 157 \\ & 6 \end{array}$$
$157 - 144 = 13$

$$\begin{array}{r|l} 13 & 24 \\ & 1 \end{array}$$
$24 - 13 = 11$

$$\begin{array}{r|l} 11 & 13 \\ & 1 \end{array}$$
$13 - 11 = 2$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 11 \\ & 5 \end{array}$$
$11 - 10 = 1$

$$\begin{array}{r|l} 1 & 2 \\ & 2 \end{array}$$
$2 - 2 = 0$

$157 \wedge 24 = 1$

PGCD $= 1$