

**CONTRÔLE ECRIT
DU SYSTEME A LA FONCTION**

Durée : 2h

Documents et calculatrices interdits

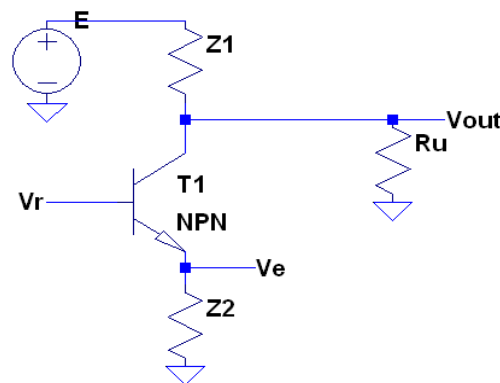
Il n'y a jamais de longs développements de calculs. Pensez à porter un regard critique sur la pertinence de vos résultats. Un formulaire mathématique est donné en dernière page de ce DE. Les objectifs de temps sont des valeurs indicatives conseillées pour terminer le DE dans les temps.

1. Questions diverses (3 points, objectif de temps : 10-15min maxi)

- 1.1 A quoi sert un convertisseur analogique-numérique (CAN) ? Définir succinctement les deux processus qu'il met en œuvre : échantillonnage et quantification
- 1.2 Dessiner l'architecture d'un réseau téléphonique en y plaçant des abonnés, des liens, et des commutateurs (nœuds de réseau). Quel est l'avantage d'une telle architecture ?
- 1.3 Citez 4 avantages et/ou inconvénients relatifs à l'utilisation d'un filtre actif

2. Étude d'un amplificateur de réception (7 pts, objectif de temps : ~40min)

Considérons le schéma suivant.



- 2.1 A l'aide de la loi d'additivité des tensions, calculer V_e en fonction de la tension d'entrée V_r . Puis calculer I_e en fonction de V_r . On considèrera que $V_{be}=0.6V$ est suffisamment petite pour être négligée.
- 2.2 A l'aide de la loi des noeuds, et d'une des relations fondamentales du transistor, déterminer une relation mathématique entre I_e et I_c (il vous est suggéré de dessiner le modèle interne équivalent du transistor pour vous aider).
- 2.3 Calculer V_{out} (pour ce faire, il est vous est suggéré de transformer E , R_u , Z_1 en un générateur de Thévenin. Redessinez sur votre copie le montage complet en remplaçant E , R_u , Z_1 par le générateur de Thévenin ainsi calculé, et en remplaçant le transistor par son modèle interne équivalent)

2.4 On considère que V_{out} est la somme d'une composante fixe (V_{out_fix}) et d'une composante variable en fonction de V_r (V_{out_var}). On définit le gain par $H_r = V_{out_var}/V_r$. Démontrer que $H_r = - (R_u // Z_1) / Z_2$.

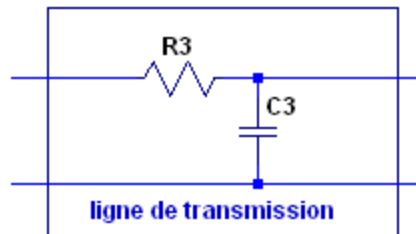
A partir de maintenant, on considère que R_u est suffisamment élevée pour être considérée comme infinie : $R_u \gg Z_1$.

On décide de remplacer Z_1 par $R_1 + L_1$ et Z_2 par $R_2 + L_2$.

2.5 Calculer le nouveau gain du montage, en fonction de ω (calculer $H_r(j\omega)$)

3. Étude d'une ligne de transmission (10 points, objectif de temps : ~1h)

On considère une ligne de transmission dont les caractéristiques sont telles qu'elle est modélisée par le schéma suivant : $R_3 = 100\text{ohm}$, $C_3 = 0,5\mu\text{F}$ ($0,5 \cdot 10^{-6}\text{F}$)



Un émetteur est placé en début de ligne. C'est un générateur de tension E_{in} , en série avec une résistance de 100ohm .

Le récepteur en fin de ligne est considéré comme ayant une résistance d'entrée R_e très élevée.

- 3.1 Dessiner un schéma de la transmission en représentant l'émetteur, la ligne de transmission (représentée par le modèle électrique donné ci-dessus) et le récepteur.
- 3.2 On définit V_r étant la tension en sortie de la ligne, et donc à l'entrée du récepteur. On définit le gain d'émission $H_e = V_r/E_{in}$. Représenter V_r et E_{in} sur le schéma, et calculer H_e (n'oubliez pas : $R_e \approx \infty$)
- 3.3 Tracer le diagramme de Bode correspondant à H_e .
- 3.4 Montrer que la fréquence de coupure est de 1.5kHz . Cette ligne est-elle adaptée à la transmission d'un signal audio ?
- 3.5 On injecte en E_{in} un signal sinusoïdal à $f_{in} = 1.5\text{kHz}$, d'amplitude $1V_{peak}$. Quelle sera l'amplitude du signal V_r ? (Il vous est suggéré de vous aider du diagramme de Bode pour connaître le gain de $H_r(j\omega)$ à la fréquence f_{in}).
- 3.6 Même question, mais avec $f_{in} = 100\text{Hz}$

En lieu et place du récepteur, on place un filtre actif dont la résistance d'entrée R_e est très élevée. On définit V_{out} étant la tension en sortie de ce filtre.

La fonction de transfert du filtre est égale à :

$$V_{out}/V_r = H_r(j\omega) = 10000k \cdot (10k + j\omega) \cdot (300k + j\omega) / [(100k + j\omega)^2 \cdot (1000k + j\omega)]$$

- 3.7 Tracer le diagramme de Bode du récepteur V_{out}/V_r

On définit le gain global de la chaîne de transmission $H = V_{out}/E_{in}$.

3.8 Que vaut H en fonction de H_e et H_r ?

3.9 Tracer le diagramme de Bode de H (il n'y a pas de nouveaux développements de calcul à faire, tout peut se faire en graphique)

3.10 Dans cette application, quel est l'intérêt d'avoir un filtre situé dans le récepteur ?

Rappels mathématiques :

- $\omega = 2\pi.f$

- on considère que $1000/(2\pi) \approx 150$

- la notation 'k' signifie « $\times 10^3$ ». Ainsi, 1.5k = 1500, 3k = 3000, etc...

Table de log :

$\log(100) = 2$	$10^2 = 100$
$\log(10) = 1$	$10^1 = 10$
$\log(4) \approx 0.6$	$10^{0.6} \approx 4$
$\log(3) \approx 0.5$	$10^{0.5} \approx 3$
$\log(2) \approx 0.3$	$10^{0.3} \approx 2$
$\log(1.4) \approx 0.15$	$10^{0.15} \approx 1.4$
$\log(1.26) \approx 0.1$	$10^{0.1} \approx 1.26$
$\log(1.12) \approx 0.05$	$10^{0.05} \approx 1.12$

Si vous avez un log que vous ne savez **vraiment** pas calculer, laissez-le sous sa forme non développée, par exemple : $\log(5/7)$.

Sur un transistor NPN :

$V_{be} \approx 0.6V$

$\beta \approx 100$

CORRIGE

1. Questions diverses

1.1 (1 points)

Un CAN sert à numériser un signal analogique. Cette opération consiste à convertir un signal analogique (valeurs continues, temps continu) en une suite de nombre (valeurs discrètes, temps discret).

- L'échantillonnage correspond à la prise de valeurs du signal à des instants réguliers (passage du temps continu à un temps discret)
- La quantification correspond à l'arrondi de valeurs réelles vers des valeurs discrètes (multiples d'un pas de quantification : $V_{\text{quantifié}} = K \cdot \text{pas_de_quantification}$, avec K entier)

Un dessin peut être adéquat (Cf cours)

1.2 (1 points)

L'architecture centralisée permet de connecter un grand nombre d'abonnés ensemble, tout en minimisant le nombre de connexions et les longueurs de câble.

1.3 (1 point)

Vous pouviez citer 4 propositions parmi les suivantes :Avantages :

- Impédance d'entrée fixe, qui ne dépend pas de la charge branchée en aval du filtre
- Impédance d'entrée qui peut être extrêmement élevée => le gain ne dépend pas de la résistance de sortie du générateur de tension en amont du filtre
- Impédance équivalente de sortie quasi-nulle (grâce au mécanisme de contre-réaction par AOP) => le gain et la fonction de transfert ne dépendent pas de l'impédance de la charge
- Possibilité de réaliser un filtre en même temps qu'un étage de gain
- Possibilité de réaliser des filtres complexes

Inconvénients :

- Courant de sortie limité (par la sortie de l'AOP)
- Fréquence maximale de fonctionnement limitée (par la vitesse de l'AOP)
- Nécessite une alimentation externe

2. Étude d'un amplificateur de réception (7 pts, objectif de temps : ~40min)

2.1 (1 point)

D'après la loi d'additivité des tensions (ou loi des mailles)

$$V_r = V_e + V_{be} = V_e + 0.6V$$

$$V_r \approx V_e \text{ (0.5 points)}$$

D'après la loi d'ohm :

$$I_e = V_e / Z_2 \text{ (0.5 points)}$$

$$\text{Donc } I_e \approx V_r / Z_2$$

2.2 (1.5 points)

D'après la loi des noeuds : $I_e = I_b + I_c$

On considère le transistor en mode linéaire : $I_c = \beta \cdot I_b \Rightarrow I_b = I_c / \beta$ (0.5 points)

$$\text{Donc } I_e = I_c / \beta + I_c = (I_c + \beta I_c) / \beta = I_c (\beta + 1) / \beta \text{ (0.5 points)}$$

Or $\beta \approx 100 \Rightarrow \beta \approx \beta + 1$ (en effet : $100 \approx 101$)

Donc : $I_e \approx I_c$ (0.5 points)

2.3 (2.5 points)

Regroupons le réseau linéaire E, R_u, Z_1 en un générateur de Thévenin équivalent :

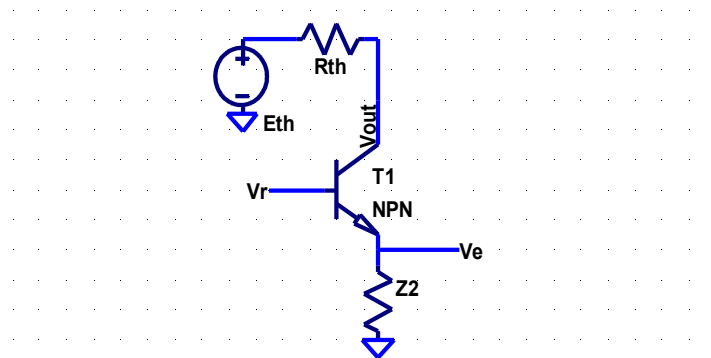
E_{th} = tension à vide du réseau linéaire

$E_{th} = E \cdot R_u / (Z_1 + R_u)$ (0.5 points)

R_{th} = résistance équivalente du réseau linéaire après avoir coupé les générateurs (E est un générateur de tension, donc il est remplacé par un fil)

$R_{th} = R_u // Z_1$ (0.5 points)

Ainsi, le schéma devient :



D'après la loi d'additivité des tensions :

$V_{out} = E_{th} - V_{r_{th}} = E_{th} - R_{th} \cdot I_c$ (0.5 points)

$V_{out} = E_{th} - R_{th} \cdot I_e = E_{th} - R_{th} \cdot V_r / Z_2$

$V_{out} = E \cdot R_u / (Z_1 + R_u) - V_r \cdot (Z_1 // R_u) / Z_2$ (0.5 points)

(0.5 points) si expliqué correctement

2.4 (0.5 points)

On a $V_{out} = E \cdot R_u / (Z_1 + R_u) - V_r \cdot (Z_1 // R_u) / Z_2$

$E \cdot R_u / (Z_1 + R_u)$ ne dépend pas de V_r , c'est la composante fixe $\Rightarrow V_{out_fix} = E \cdot R_u / (Z_1 + R_u)$

$V_r \cdot (Z_1 // R_u) / Z_2$ dépend de V_r , c'est la composante variable $\Rightarrow V_{out_var} = V_r \cdot (Z_1 // R_u) / Z_2$

$H_r = V_{out_var} / V_r$ donc : $H_r = (Z_1 // R_u) / Z_2$ (0.5 points)

2.5 (1.5 points)

R_u infinie $\Rightarrow R_u // Z_1 \approx Z_1$

Donc $H_r \approx Z_1 / Z_2$ (0.5 points)

$H_r = (R_1 + Z_{l1}) / (R_2 + Z_{l2})$ (0.5 points)

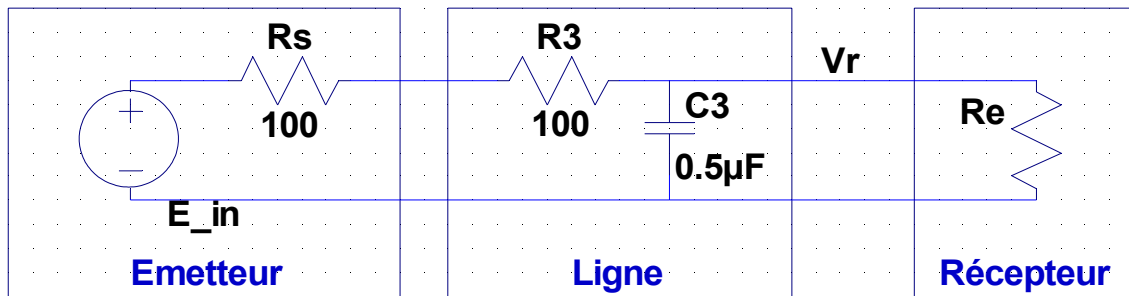
$H_r = (R_1 + jL_1\omega) / (R_2 + jL_2\omega)$ (0.5 points)

(facultatif : $H_r = R_1 / R_2 \cdot (1 + jL_1 / R_1\omega) / (1 + jL_2 / R_2\omega)$)

3. Étude d'une ligne de transmission (10 points, objectif de temps : ~1h)

3.1 (1 point)

Le schéma de la transmission est le suivant :



3.2 (1 point)

Soit R_s la résistance série du générateur

On considère que R_e est infinie. Cette résistance n'intervient donc pas dans les calculs.

D'après la règle du pont diviseur :

$$V_r = E_{in} \cdot Z_{c3} / (Z_{c3} + (R_3 + R_s))$$

$$H_r = V_r / E_{in} = Z_{c3} / (Z_{c3} + (R_3 + R_s)) \quad (0.5 \text{ points})$$

$$H_r = 1 / (1 + (R_3 + R_s) / Z_{c3})$$

$$H_r = 1 / (1 + j(R_3 + R_s) \cdot C_3 \cdot \omega) \quad (0.5 \text{ points})$$

3.3 (1 point)

$$H_r = 1 / (1 + j\omega / \omega_0) \text{ avec } \omega_0 = 1 / ((R_3 + R_s) \cdot C_3) \quad (0.5 \text{ points})$$

Le tracé de Bode trivial (c'est directement une fonction de base, Cf cours) (0.5 points)

3.4 (1.5 points)

La pulsation de coupure est ω_0 (en rad/s) (0.5 points)

La fréquence de coupure du filtre est égale à $f_0 = \omega_0 / 2\pi$ (car $\omega = 2\pi \cdot f$) (0.5 points)

$$\text{Donc } f_0 = 1 / (2\pi \cdot (R_3 + R_s) \cdot C_3)$$

$$f_0 = 1 / (2\pi \cdot (100 + 100) \cdot 0,5 \cdot 10^{-6}) = 10^6 / (2\pi \cdot 100) = 10^4 / 2\pi$$

$$f_0 \approx 1500 \text{ Hz}$$

Cette ligne n'est pas adaptée pour transmettre de l'audio, car la bande passante des signaux audio est au moins de 300Hz-3000Hz. Cette ligne atténue donc une partie du signal audio, ce qui a pour effet de le déformer. (0.5 points)

3.5 (1.5 points)

À $f = 1500 \text{ Hz}$, on est en f_0 (ou en ω_0) sur le diagramme de Bode.

D'après lecture graphique sur le tracé de Bode réel (pas le tracé asymptotique) : $H_r(j\omega) = -3 \text{ dB}$ (0.5 points)

$$\text{Donc } V_r / E_{in} = -3 \text{ dB}$$

$$\text{Donc } 20 \cdot \log(|V_r / E_{in}|) = -3$$

$$\text{Donc } \log(|V_r / E_{in}|) = -3 / 20 = -0.15$$

$$\text{Donc } |V_r / E_{in}| = 10^{-0.15} \quad (0.5 \text{ points})$$

$$|V_r / E_{in}| = 1 / 10^{0.15} \approx 1 / 1.4 \approx 0.7$$

Donc $V_r \approx 0.7 \cdot E_{in} \approx 0.7V$ (0.5 points)

3.6 (1 point)

Pour $f_{in} = 100\text{Hz}$, $\omega = 2\pi \cdot f \approx 630 \text{ rad/s}$

D'après lecture graphique sur le tracé de Bode réel : $H_r(j\omega) \approx 0\text{dB}$ (0.5 points)

Donc $|V_r/E_{in}| \approx 10^0 = 1$

Donc $V_r \approx E_{in} = 1V$ (0.5 points)

3.7 Tracer le diagramme de Bode du récepteur V_{out}/V_r (2 points)

$$V_{out}/V_r = 10000k \cdot 10k \cdot 300k / (100k^2 \cdot 1000k) \cdot (1 + j\omega/10k) \cdot (1 + j\omega/300k) / [(1 + j\omega/100k)^2 \cdot (1 + j\omega/1000k)]$$

$$\text{Or : } 10000k \cdot 10k \cdot 300k / (100k^2 \cdot 1000k) = 10000 \cdot 10 \cdot 300 / (100 \cdot 100 \cdot 1000) = 30000000/10000000 = 3$$

$$V_{out}/V_r = 3 \cdot (1 + j\omega/\omega_1) \cdot (1 + j\omega/\omega_2) / [(1 + j\omega/\omega_3)^2 \cdot (1 + j\omega/\omega_4)] \text{ (0.5 points)}$$

Avec

$$\omega_1 = 10k \cdot \text{rad/s}$$

$$\omega_2 = 300k \cdot \text{rad/s}$$

$$\omega_3 = 100k \cdot \text{rad/s}$$

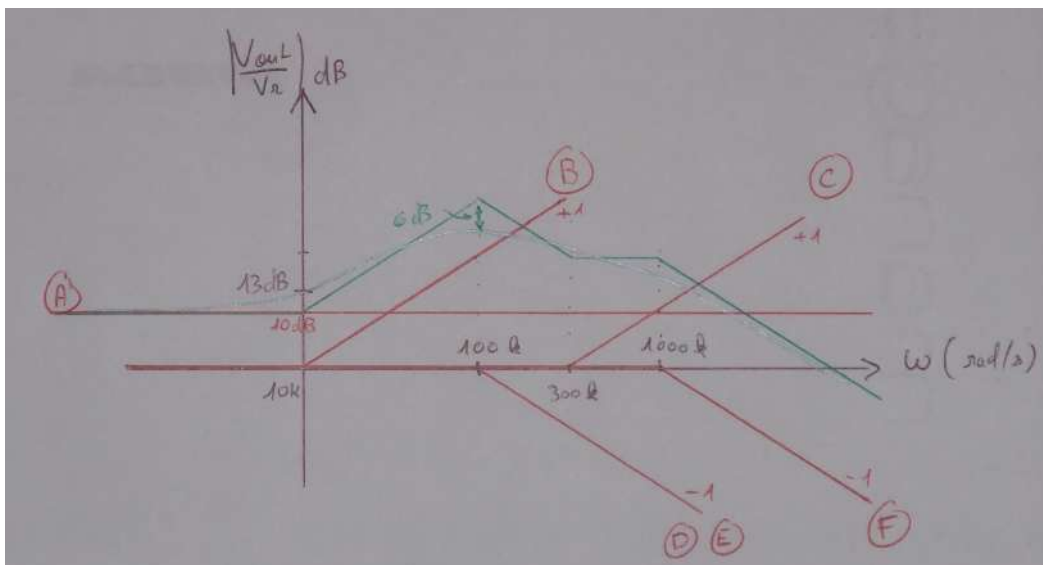
$$\omega_4 = 1000k \cdot \text{rad/s}$$

$$\text{et } 20 \cdot \log(3) = 10\text{dB}$$

(0.5 points)

Points d'attention pour le tracé de Bode : (0.5 points)

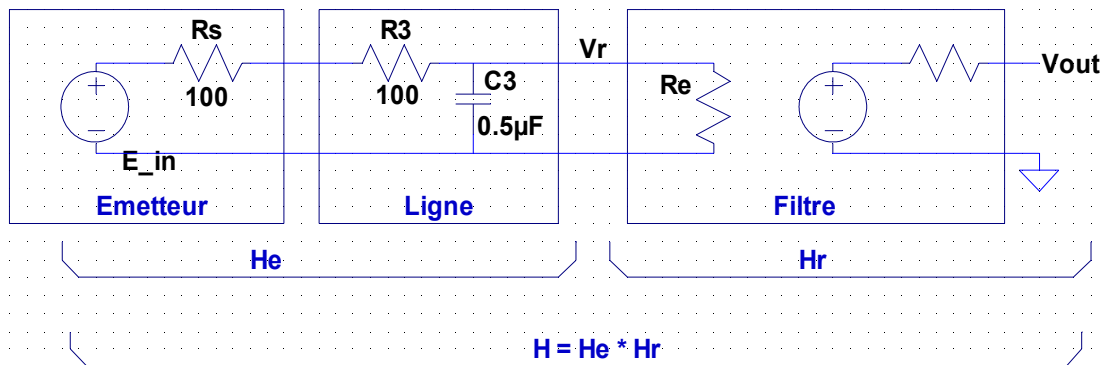
- axe des abscisses nommé ω (rad/s) ou f (Hz), gradué en log
- axe des ordonnées nommé $H(j\omega)$ en dB (au moins parler des dB)
- tracé asymptotique : pas d'erreur de pente
- indiquer l'offset 10dB quelque part sur l'axe des ordonnées
- tracé réel à 3dB max des cassures de pentes d'ordre 1, ou 6dB max des cassures de pente d'ordre 2



(0.5 points)

3.8 Que vaut H en fonction de He et Hr ? (0.5 points)

Il est utile de tracer un schéma de la nouvelle transmission :



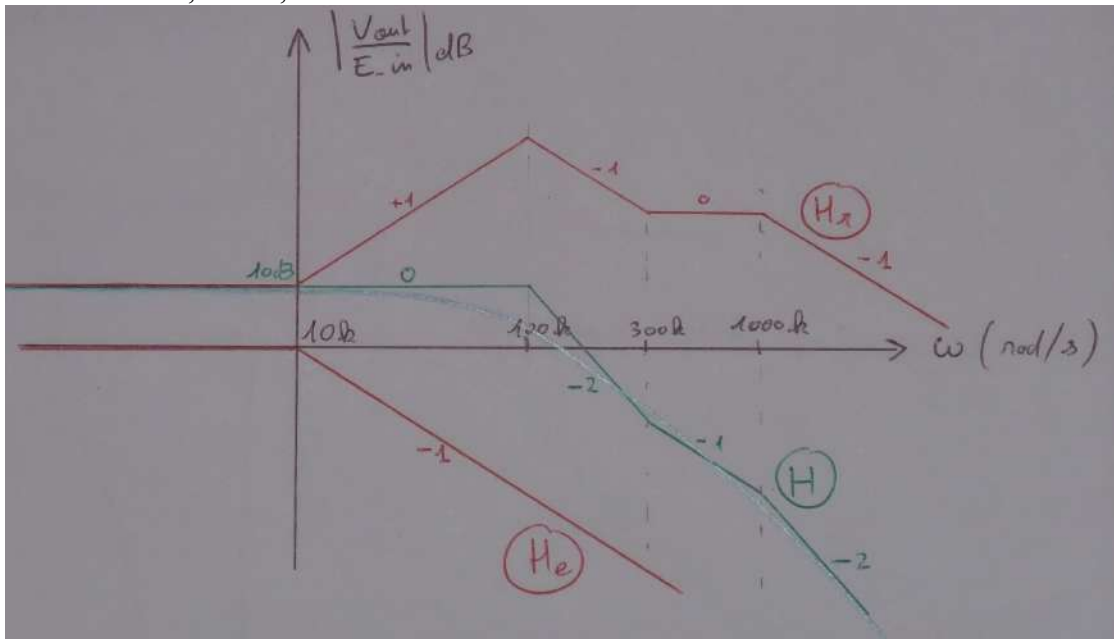
$$H_e = V_r / E_{in} \Rightarrow V_r = H_e \cdot E_{in}$$

$$H_r = V_{out} / V_r \Rightarrow V_{out} = H_r \cdot V_r = H_r \cdot H_e \cdot E_{in}$$

$$\text{Donc } H = V_{out} / E_{in} = H_r \cdot H_e$$

3.9 (1 point)

Comme $H = H_r \cdot H_e$, en dB, les courbes de Bode de He et de Hr s'additionnent.



3.10 Dans cette application, quel est l'intérêt d'avoir un filtre situé dans le récepteur ? (1 point)

Le filtre dans le récepteur permet de faire en sorte que la fonction de transfert totale soit plate jusqu'à une fréquence plus élevée que ne le permet la ligne seule.

En effet, la ligne de transmission coupait les fréquences audio au-dessus de 1.5kHz. Maintenant équipé du filtre, l'ensemble ne les coupe maintenant plus qu'à partir de $\omega = 300 \text{krad/s}$, soit $f \approx 50 \text{kHz}$. Il n'y a donc plus de problème pour transmettre de l'audio jusqu'à 20kHz.

Ce filtre a donc permis de corriger des imperfections de la ligne de transmission. Cette ligne qui, initialement, ne pouvait transmettre correctement que des signaux jusqu'à 1.5kHz peut maintenant grâce au filtre transmettre des signaux jusqu'à 50kHz sans déformation.