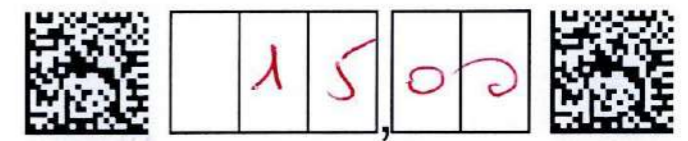


Sans calculatrice, ni document.
 Vous composerez sur le sujet.
 Le sujet comporte 6 pages à rendre.



GAUTIER Arthur
 L2 - 2014

Exercice n°1 : (7 points) ⑥

On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 7 \end{bmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de A.

IB. Quelques calculs

$$\det(A - \lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 & 2 \\ 3 & 4-\lambda & 1 \\ 3 & 3 & 7-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{L_3: L_3 - L_1} \begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 & 2 \\ 3 & 4-\lambda & 1 \\ 1+\lambda & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{L_1: L_1 + L_3} \begin{vmatrix} 6-\lambda & 3 & 2 \\ 4 & 4-\lambda & 1 \\ 1+\lambda & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3: L_3 - L_2} \begin{vmatrix} 6-\lambda & 3 & 2 \\ 4 & 4-\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda+1 & 4-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{L_2: L_2 + L_3} \begin{vmatrix} 6-\lambda & 5 & 2 \\ 4 & 5-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda) \begin{vmatrix} 6-\lambda & 5 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (4-\lambda)(\lambda^2 - 11\lambda + 10)$$

$$\Delta = 121 - 60 \\ = 81$$

$$\lambda_1 = \frac{11-9}{2} = 1$$

$$\lambda_2 = \frac{11+9}{2} = 10$$

$$4 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 4$$

$$\lambda_3 = 4$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 10 \\ \lambda_3 = 4 \end{cases}$$

2. Déterminer des vecteurs propres unitaires associés aux valeurs propres de A

$$\underline{\lambda=1} : AV = \lambda V$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 4x + 3y + 2z = x \\ 3x + 4y + z = y \\ 3x + 3y + 7z = 3 \end{cases}$$

$$3 = y - 4y - 3x \Leftrightarrow 3 = -3y - 3x$$

$$3x + 3y + 7(-3y - 3x) = -3y - 3x$$

$$6x + 6y - 21x - 21y = 0 \Leftrightarrow 15x = -15y \Leftrightarrow x = -y$$

$$3 = -3y + 3y = 0$$

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

*vector
is linear*

$$\lambda = 4 : AU = 4U$$

$$\lambda = 10 : AU = 10U$$

$$\begin{cases} 4x + 3y + 2z = 10x \\ 3x + 4y + z = 10y \\ 3x + 3y + 7z = 10z \end{cases}$$

$$3 = 6y - 3x$$

$$4x + 3y + 12y - 6x = 10x$$

$$15y = 12x$$

$$y = \frac{4}{5}x$$

$$U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 6x + 3y + 2z = 2x \\ 3x + 4y + z = 4y \\ 3x + 3y + 7z = 4z \end{cases}$$

$$U_2: \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$z = 4y - 4y - 3x = -3x$$

$$3x + 3y - 7x = -16x$$

$$-4x - 3y \Rightarrow y = 2x$$

$$z = \frac{24x - 3x}{5} = x \left(\frac{24 - 3}{5} \right) = \frac{21}{5}x$$



lait	0,584	-0,707
légume	0,970	-0,133
vin	-0,428	-0,648

MA3	-0,615	0,969	-0,097	0,024	0,993
EM3	-0,511	0,892	0,049	0,008	0,900
CA3	0,511	0,482	0,409	0,308	0,790
MA4	-0,281	0,299	-0,414	0,646	0,945
EM4	-0,076	0,097	-0,191	0,607	0,704
CA4	0,483	0,429	0,523	0,505	0,934
MA5	0,067	0,006	-0,837	0,945	0,951
EM5	0,588	0,605	-0,341	0,203	0,808
CA5	1,302	0,956	0,030	0,001	0,956

maximum	655	887	2630	1167	561	1097	488
minimum	293	341	1437	526	235	428	258
moyenne	446,7	505,0	1886,8	803,2	358,3	732,0	368,6
écart type	102,6	158,1	378,9	238,9	112,1	181,1	68,7

a. Quelle est la signification géométrique et quelle est l'importance de « q1 » ?

La q1 sera la proximité de la valeur avec l'axe. Plus elle est haute, plus le point sera près de l'axe et plus celui-ci a une importance dans la valeur du point.

b. Quelle est la signification de la matrice des saturations ? Avec les notations usuelles, rappeler sa définition.

La matrice de saturation définit le niveau de corrélation des variables. non

1: les variables sont identiques, 0: les variables sont indépendantes, -1: les variables sont inversées

$$S = \frac{1}{n} A^T F \Lambda^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{n} A^T (A \Lambda U) \Lambda^{-\frac{1}{2}}$$

Les questions qui suivent portent sur ces données. Pour certaines d'entre elles, il s'agit de choisir parmi plusieurs possibilités en justifiant votre choix.

Question 1 :

Expliquez pourquoi nous allons effectuer une Analyse en Composantes Principales et pourquoi une ACP centrée et réduite.

Les variables sont quantitatives et de même importance ce qui implique une ACP. Comme les variances (écart-type au carré) des valeurs sont éloignées, on réalise une ACP centrée réduite.

Question 2 :

Voici trois propositions pour la matrice centrée réduite associée aux données étudiées. Choisissez celle qui vous semble correcte, en justifiant votre choix.

1.

1	-0,323	-0,276	-0,343	-0,335	-0,286	-0,485
2	-0,432	-0,214	-0,274	-0,285	-0,307	-0,276
3	-0,210	0,104	0,047	0,150	-0,317	0,056
4	-0,114	-0,300	-0,289	-0,313	-0,088	-0,269
5	-0,171	-0,199	-0,294	-0,296	-0,101	-0,198
6	-0,024	0,336	0,349	0,417	-0,297	0,177
7	0,246	-0,252	-0,203	-0,200	0,144	-0,115
8	0,038	-0,038	-0,023	-0,050	0,107	-0,053
9	-0,174	0,212	0,365	0,418	-0,140	0,091
10	0,586	-0,150	-0,030	-0,053	0,352	0,070
11	0,386	0,079	0,129	0,109	0,411	0,419

2.

1	-0,323	-0,276	-0,343	-0,335	-0,286	-0,485	0,850
2	-0,432	-0,214	-0,274	-0,285	-0,307	-0,276	-1,609
3	-0,210	0,104	0,047	0,150	-0,317	0,056	0,937
4	-0,114	-0,300	-0,289	-0,313	-0,088	-0,269	0,556
5	-0,171	-0,199	-0,294	-0,296	-0,101	-0,198	-0,081
6	-0,024	0,336	0,349	0,417	-0,297	0,177	-0,401
7	0,246	-0,252	-0,203	-0,200	0,144	-0,115	0,559
8	0,038	-0,038	-0,023	-0,050	0,107	-0,053	0,690
9	-0,174	0,212	0,365	0,418	-0,140	0,091	-1,260
10	0,586	-0,150	-0,030	-0,053	0,352	0,070	1,708
11	0,386	0,079	0,129	0,109	0,411	0,419	-0,721
12	0,192	0,698	0,566	0,440	0,522	0,582	-1,231

3.

1	-0,323	-0,276	-0,343	-0,335	-0,286	-0,485	0,850
2	-0,432	-0,214	-0,274	-0,285	-0,307	-0,276	-1,609
3	-0,210	0,104	0,047	0,150	-0,317	0,056	0,937
4	-0,114	-0,300	-0,289	-0,313	-0,088	-0,269	0,556
5	-0,171	-0,199	-0,294	-0,296	-0,101	-0,198	-0,081
6	-0,024	0,336	0,349	0,417	-0,297	0,177	-0,401
7	0,246	-0,252	-0,203	-0,200	0,144	-0,115	0,559
8	0,038	-0,038	-0,023	-0,050	0,107	-0,053	0,690
9	-0,174	0,212	0,365	0,418	-0,140	0,091	-1,260
10	0,586	-0,150	-0,030	-0,053	0,352	0,070	1,708
11	0,386	0,079	0,129	0,109	0,411	0,419	-0,721
12	0,192	0,698	0,566	0,440	0,522	0,582	-1,231

1.

1	1,000	0,196	0,321	0,248	0,856	0,593
2	0,196	1,000	0,959	0,926	0,332	0,856
3	0,321	0,959	1,000	0,982	0,375	0,881
4	0,248	0,926	0,982	1,000	0,233	0,827
5	0,856	0,332	0,375	0,233	1,000	0,663
6	0,593	0,856	0,881	0,827	0,663	1,000

2.

1	1,000	0,196	0,321	0,248	0,856	0,593	0,304
2	0,196	1,000	0,959	0,926	0,332	0,856	-0,486
3	0,321	0,959	1,000	0,982	0,375	0,881	-0,437
4	0,248	0,926	0,982	1,000	0,233	0,827	-0,400
5	0,856	0,332	0,375	0,233	1,000	0,663	0,007
6	0,593	0,856	0,881	0,827	0,663	1,000	-0,356
7	0,304	-0,486	-0,437	-0,400	0,345	-0,356	1,000

3.

1	1,000	0,196	0,321	0,248	0,856	0,593	0,304
2	0,196	1,000	0,959	0,926	0,332	0,856	-0,486
3	0,321	0,959	1,000	0,982	0,375	0,881	-0,437
4	0,248	0,926	0,982	1,000	0,233	0,827	-0,400
5	0,856	0,332	0,375	0,233	1,000	0,663	0,007
6	0,593	0,856	0,881	0,827	0,663	1,000	-0,356
7	0,304	-0,486	-0,437	-0,400	0,007	-0,356	1,000

Réponse : La matrice 2 n'est pas symétrique, la matrice 1 n'est pas de taille 7x7
 car la matrice 3

2	-0,432	-0,214	-0,274	-0,285	-0,307	-0,276	-1,609
6	-0,210	0,104	0,047	0,150	-0,317	0,056	0,937
5	-0,114	-0,300	-0,289	-0,313	-0,088	-0,269	0,556
0	-0,171	-0,199	-0,294	-0,296	-0,101	-0,198	-0,081
-2	-0,024	0,336	0,349	0,417	-0,297	0,177	-0,401
8	0,246	-0,252	-0,203	-0,200	0,144	-0,115	0,559
9	0,038	-0,038	-0,023	-0,050	0,107	-0,053	0,690
10	-0,174	0,212	0,365	0,418	-0,140	0,091	-1,260
11	0,586	-0,150	-0,030	-0,053	0,352	0,070	1,708
12	0,386	0,079	0,129	0,109	0,411	0,419	-0,721
12	0,192	0,698	0,566	0,440	0,522	0,582	1,231

Réponse : La matrice Z car le coefficient $x_{12,7}$ est calculé par $\frac{1}{n} \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sigma_x \sigma_y}$ qui est négatif. Or, $x_{12,7}$ est positif dans la matrice Z.

Question 3 :

Voici trois propositions pour la matrice de corrélation associée aux données étudiées. Choisissez celle qui vous semble correcte, en justifiant.

Corr R: $\frac{1}{n} \sum A^T \times A^S$

Question 4 :

Voici trois propositions pour les valeurs propres associée aux données étudiées. Choisissez celle qui vous semble correcte, en justifiant votre choix.

1.

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7
4,333	1,830	0,631	0,128	0,058	0,019	0,001

2.

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
4,333	1,830	0,631	0,128	0,058	0,019

3.

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7
4,333	1,830	1,631	0,128	0,058	0,019	0,001

Réponse : Les valeurs 4 car si on ne dépense pas les 100 la somme des λ_i dépense 7 (la trace de la matrice R)