Exercice 2

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2-1) = 0$$

$\lambda = 1$ valeur propre double. $\lambda = -1$

vecteur propre associé à 1

$Au = u$

$$\begin{cases} x = x \\ z = y \\ y = z \end{cases} \quad z = y \quad u = (x, y, y) = x(1,0,0) + y(0,1,1)$$

Double infinité selon x et y.

Exercice 3.

On centre les valeurs en retirant les moyennes.

$$X = \begin{matrix} 1 & 6 \\ 2 & 8 \\ 3 & 4 \\ 2 & 10 \\ 5 & 7 \\ 6 & 5 \\ 7 & 9 \\ 6 & 8 \end{matrix} \qquad X^c = \begin{matrix} -3 & -2 \\ -2 & 0 \\ -1 & 3 \\ -2 & 2 \\ 1 & -1 \\ 2 & -3 \\ 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{matrix}$$

$\bar{x} = 4 \quad \bar{y} = 8.$

$$\Sigma = \frac{1}{n} \, {}^t X^c . X^c$$

TD3 Exercice 1

Distance en A et B (individus).

$$d^2(A,B) = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + \dots$$

en mèt $\begin{cases} d^2(4,5) = (0{,}05)^2 + 1 + 1 = 2{,}0025 \\ d^2(5,6) = 3^2 = 9 \\ d(4,6) = (0{,}05)^2 + 1 + 2^2 = 5{,}0025. \end{cases}$

en cm. $\begin{cases} d^2(4,5) = 5^2 + 1 + 1 = 27 \\ d^2(5,6) = 3^2 = 9. \\ d(4,6) = 5^2 + 1 + 2^2 = 30 \end{cases}$

Il faut centrer réduire les variables.

3)

	Poids	Taille	âge	note
moyennes :	58,5	1,64	13,8	12
écart-type :	7,43.	0,07	0,75	3,32

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}367 & 0{,}485 & -0{,}568 \\ 0{,}367 & 1 & 0{,}396 & -0{,}629 \\ 0{,}485 & 0{,}396 & 1 & -0{,}322 \\ -0{,}568 & -0{,}629 & -0{,}332 & 1 \end{bmatrix}$$

matrice de corrélation.

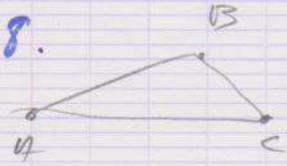
$\lambda_1 = 2{,}391$ $\lambda_2 = 0{,}750$ $\lambda_3 = 0{,}584$ $\lambda_4 = 0{,}274$.

$$U = \begin{bmatrix} 0{,}508 & -0{,}367 & -0{,}659 & 0{,}462 \\ 0{,}504 & 0{,}463 & 0{,}525 & 0{,}504 \\ 0{,}445 & -0{,}766 & 0{,}471 & -0{,}285 \\ -0{,}538 & -0{,}438 & 0{,}259 & 0{,}672 \end{bmatrix}$$

Exercice 2.

$d^2(A,B) = 50^2 + 5^2 + 3^2 = 2534.$

$d^2(AC) = 47^2 + 10^2 + 20^2 + 10^2 + 3^2 = 2818.$



Reduire
Pour ~~centrer~~ on divise par l'écart Type

$d^2(B,C) = 3^2 + 5^2 + 10^2 + 10^2 = 534.$

Ce transport et communication.

$\overline{Tr} = 10{,}83 \quad \overline{Bo} = 4{,}5. \quad \overline{Wo} = 23{,}33 \quad \overline{Jo} = 6{,}66. \quad \overline{Ci} = 2{,}33.$

Matrice centrée.

$$\begin{bmatrix} 39{,}17 & & \\ -10{,}83 & & \\ -7{,}83 & \cdots & \\ -10{,}83 & & \\ -9{,}83 & & \\ 0{,}83 & & \end{bmatrix}$$

$\overline{Tr} = \frac{65}{6}$

$\overline{Bo} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$

$\overline{Wo} = \frac{140}{6} = \frac{70}{3}$

$\overline{Jo} = \frac{40}{6} = \frac{20}{3}$

$\overline{Co} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}.$

$d^2(A^c, B^c) = \left(50 - \frac{65}{6} - \left(0 - \frac{65}{6}\right)\right)^2 + \dots + \; = d^2(A,B)$

Centré ne change pas la distance.

$\frac{8}{3} - \lambda - \frac{6}{3} + \lambda$

TD4 ACP Complète.

1/ Cen centre :

$\bar{N} = 3 \quad \bar{S} = 4 \quad \bar{P} = 4$

$$A^c = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \Sigma = \frac{1}{n} {}^t A^c \times A^c$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \frac{22}{6} & \frac{-2}{6} & \frac{-2}{6} \\ -\frac{2}{6} & \frac{16}{6} & \frac{4}{6} \\ -\frac{2}{6} & \frac{4}{6} & \frac{16}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{8}{3} \end{bmatrix}$$

2/ Calcul de valeur propre.

$$\det \begin{bmatrix} \frac{11}{3} - \lambda & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} - \lambda & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{8}{3} - \lambda \end{bmatrix} L_3 - L_2 = \begin{bmatrix} \frac{11}{3} - \lambda & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} - \lambda & \frac{2}{3} \\ 0 & -2 + \lambda & 2 - \lambda \end{bmatrix}$$

$C_2 + C_3$

$$\begin{bmatrix} \frac{11}{3} - \lambda & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{10}{3} - \lambda & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{bmatrix} = 2 - \lambda \begin{vmatrix} \frac{11}{3} - \lambda & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{10}{3} - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\left(\left(\frac{11}{3} - \lambda\right)\left(\frac{16}{3} - \lambda\right) - \left(\frac{2}{9}\right.\right)$$

8

TD4

$$X^c = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \Sigma = \frac{1}{6} {}^t X^c X^c = \begin{bmatrix} \frac{11}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{8}{3} \end{bmatrix}$$

$$\det(\Sigma - \lambda I) = \begin{vmatrix} \frac{11}{3}-\lambda & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{8}{3}-\lambda & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{8}{3}-\lambda \end{vmatrix} \quad L_2 - L_3 \to L_2$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{11}{3}-\lambda & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 2-\lambda & -2+\lambda \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{8}{3}-\lambda \end{vmatrix} \quad C_2 + C_3 \to C_2$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{11}{3}-\lambda^{\oplus} & -\frac{2}{3}^{\ominus} & -\frac{1}{3}^{\oplus} \\ 0 & 0 & {}^{\ominus}-2+\lambda \\ -\frac{1}{3} & \frac{10}{3}-\lambda & \frac{8}{3}-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -(-2+\lambda) \begin{vmatrix} \frac{11}{3}-\lambda & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{10}{3}-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\left[\left(\frac{11}{3}-\lambda\right)\left(\frac{10}{3}-\lambda\right) - \frac{2}{9}\right]$$

$$= (2-\lambda)\left(\lambda^2 - 7\lambda + \frac{110}{9} - \frac{2}{9}\right)$$

$\det(\Sigma - \lambda I) = 0 \iff \lambda = 2$ ou $\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0$

$\Delta = 49 - 48 = 1$

$\lambda = \frac{7-1}{2} = 3$ ou $\lambda = \frac{7+1}{2} = 4$

$\sum \lambda = 2 + 3 + 4 = 9$

$Tr\, \Sigma = \frac{11}{3} + \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = 9$

$\lambda_1 = 4$ axe 1 ; $\frac{4}{9} \times 100 = 45\%$

$\lambda_3 = 3$ axe 2 ; $\frac{3}{9} \times 100 = 33\%$

Sélecte des axes 1 et 2 qqc $= 78\%$.

$\lambda_1 = 4 \quad \Sigma u = 4u$

$$\begin{cases} \frac{11}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z = 4x \\ -\frac{1}{3}x + \frac{8}{3}y + \frac{2}{3}z = 4y \\ -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{8}{3}z = 4z. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x - y - z = 0 \\ -x - 4y + 2z = 0 \\ -x + 2y - 4z = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \to L_1 \\ L_2 + L_1 \to L_2 \\ L_3 + L_1 \to L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \to L_1 \\ L_2 \to L_2 \\ L_3 + L_2 \to L_3 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2z \\ y = z \end{cases} \Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} -2z \\ z \\ z \end{pmatrix}$$

$$\|u_1\|^2 = 1 \Leftrightarrow 4z^2 + z^2 + z^2 = 1$$

$$6z^2 = 1$$

$$z^2 = \frac{1}{6} \qquad z = \frac{1}{\sqrt{6}} \text{ ou } -\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{6} \text{ ou } -\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

$$u_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Vérification si pas orthogonaux on s'est trompé.

$$u_2 \cdot u_3 = \frac{\sqrt{3}}{3} \times 0 + \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$= 0 + \frac{\sqrt{6}}{6} - \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$= 0$$

$$F = X^t U \text{ où } U = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Vérification somme des colonnes égale à 0.

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{6} & \sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{6} & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{6} & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{6} & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{3} & -2\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \text{jean}$$

$= 0.$

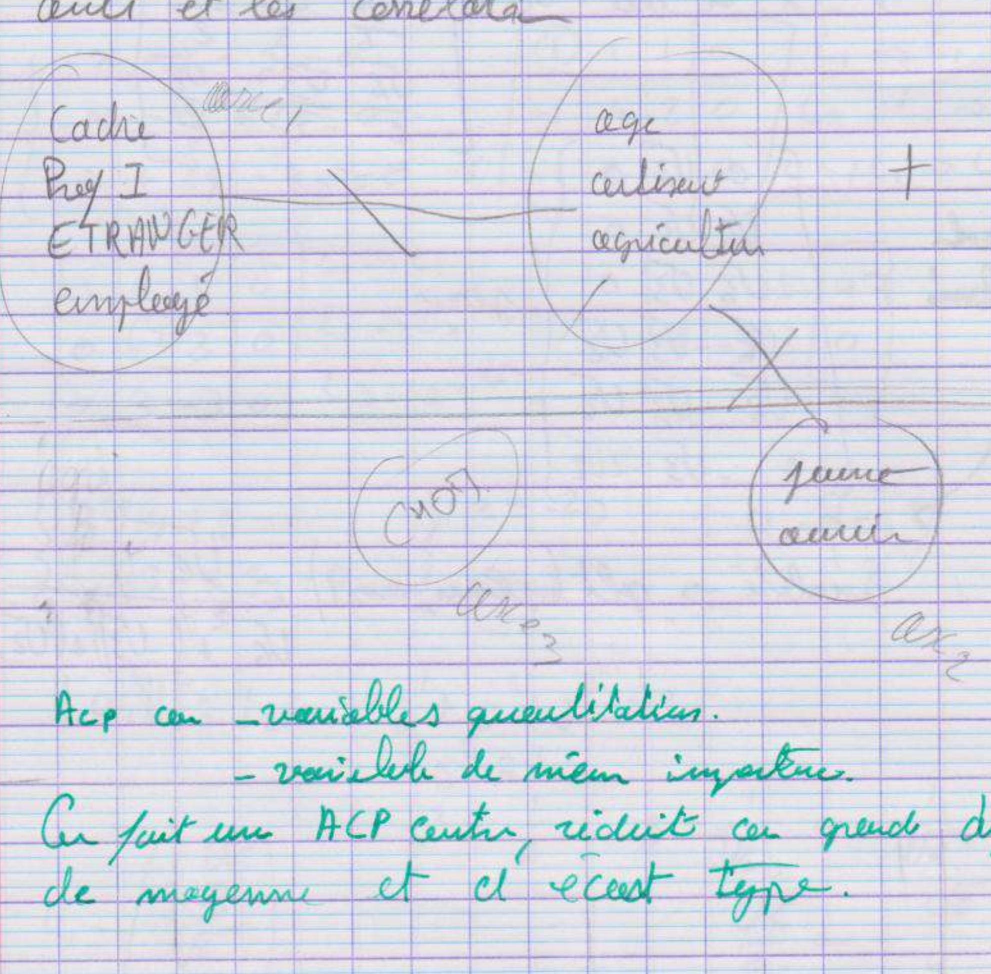
qualité -> qlt(jean, axe1) $= \frac{\sqrt{6}^2}{\sqrt{6}^2 + (-\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2} = \boxed{\frac{6}{11}}$

TD5 Cheminement :

- Pourquoi faire ACP ?
- ACP centré ou centré réduit ?
- Analyser la matrice R
- Choix des axes + qqe
- Cercles de corrélation + analyse
- Sélection des individus intéressants + représentation. + analyse

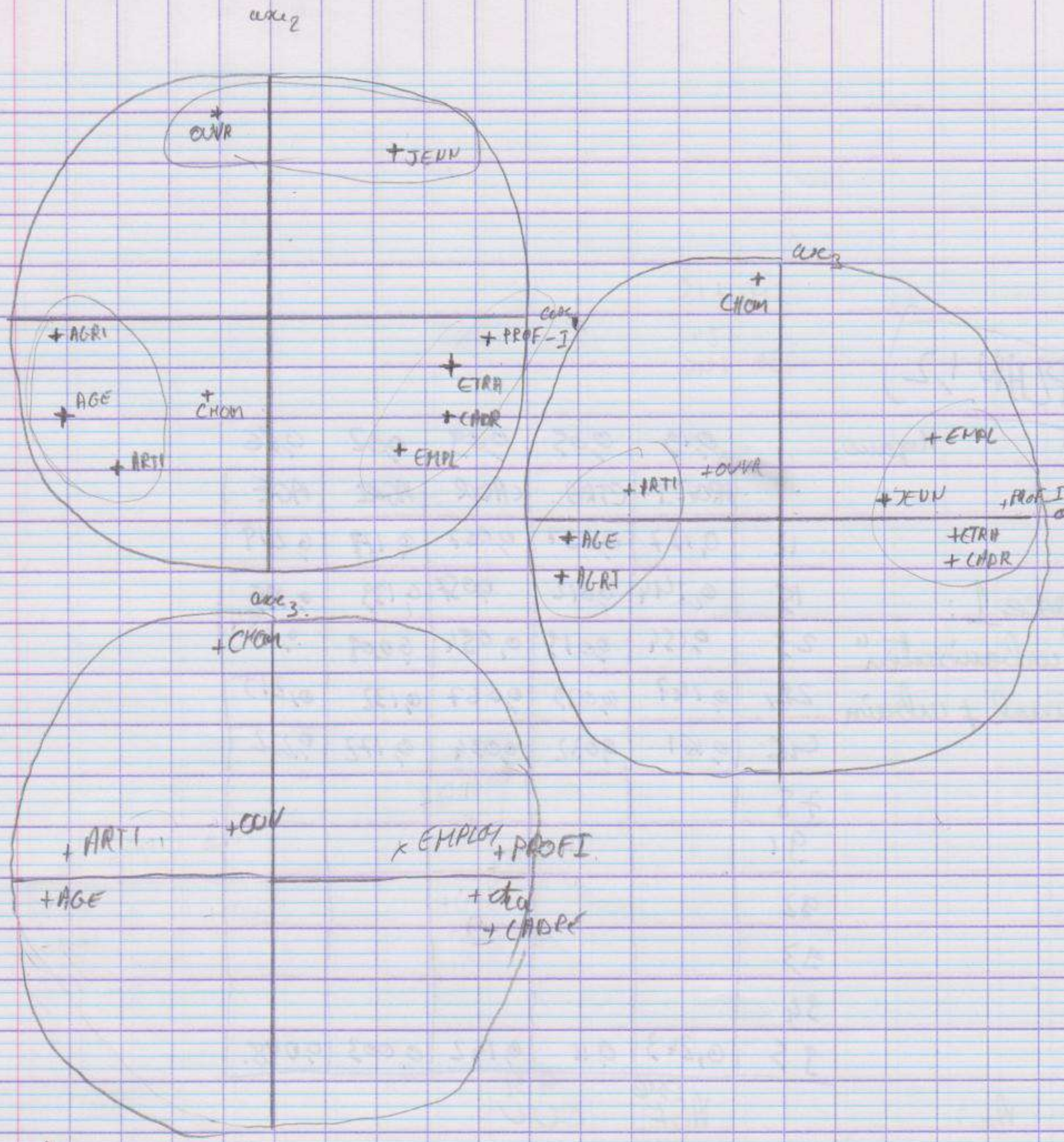
On repère les corrélation et anti-corrél. On fait des groupes On regarde par rapport aux axes On fait cercle de corrélation

On repère dans la matrice de corrélation les anti et les corrélation



Acp car - variables quantitatives.
- variable de même importance.

On fait un ACP centré réduit car grande différence de moyenne et d'écart type.

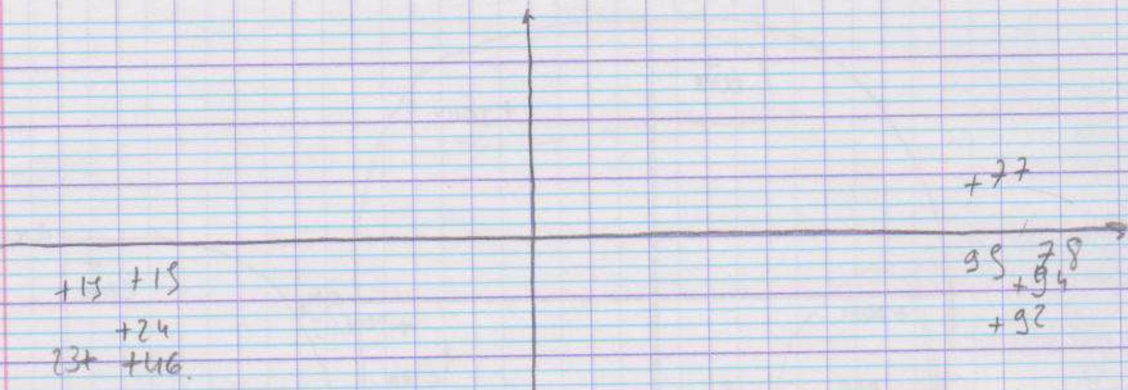


Axe 1: Anti-corrélation entre Prof-I ETRA CADR.

Axe 2: OUV, Jeune

Axe 3: CHOM.

Ensuite on sélectionne des individus en fonction de leur qualité et du fait qu'ils seront en position extrême (dans la matrice F des composantes principales.



PLAN 1,2

Moyenne :

	PROF-I	ETRA	CADR	AGRI	AGE
Moyenne	0,19	0,05	0,09	0,02	0,16
12	0,157	0,027	0,067	0,178	0,219
15	0,144	0,012	0,057	0,199	0,195
23	0,154	0,013	0,054	0,208	0,254
24	0,147	0,029	0,067	0,132	0,219
46	0,161	0,032	0,074	0,172	0,222
78					
91					
92					
93					
94					
95	0,243	0,11	0,142	0,003	0,088.

axe 1 : "urbanisation" rural ≠ urbain

Axe 2.

	AGE	CUU
	0,16	0,31
2	0,289	0,4
6	0,21	0,227
10	0,77	0,401
25	0,285	0,381
27	0,298	0,388
34	0,241	0,23
65	0,219	0,287
83	0,238	0,245