# TD 1

## Exercice 1

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

AB : Produit existe

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} (1+0+5+0) & (2-4+15-2) & (1+4-2) \\ (\quad 6 \quad) & (-6+18+3) & (6+3) \\ (\quad 0 \quad) & (2+(-8)-3) & (1+8+0) \end{matrix} \end{array} = \begin{pmatrix} 6 & 11 & 3 \\ 6 & 15 & 9 \\ 0 & -9 & 9 \end{pmatrix}$$

BA : Produit existe

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 12 & 16 & 4 \\ 2 & 2 & -14 & -6 \\ 1 & 11 & 23 & 7 \\ 1 & 7 & 5 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

AC : impossible

CA : $\begin{pmatrix} 6 & 31 & 18 & 7 \\ 8 & 34 & 16 & 2 \end{pmatrix}$

BC X

CB X

Exercice 2

Résoudre
$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 6 \\ 2x + 3y + z = -7 \\ -3x - 2y + 4z = -11 \end{cases}$$

$S_1 :$
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x + 2y - z = 2 \\ x + 4y + z = -1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ l_2 + l_1 \\ l_3 + l_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ l_2/3 \\ l_3/3 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5/3 \end{array}\right) \begin{array}{l} l_1 - l_2 \\ \\ l_3 - l_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5/3 \end{array}\right) \begin{array}{l} l_1 \Leftrightarrow l_2 \\ l_2 \Leftrightarrow l_1 \\ \\ \end{array}$$

$$y = 1$$
$$x + z = 0$$
$$0 = -5/3$$

0 ne peut pas être égal à $-5/3$ donc pas de solutions :

$S_1 = \emptyset$

$S_2$ : $\begin{cases} x+y+z=4 \\ -x+2y-z=-7 \\ 2x+4y+3z=8 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -1 & -7 \\ 2 & 4 & 3 & 8 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \ell_2+\ell_1 \\ \ell_3-2\ell_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \ell_2/3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \ell_1-\ell_2 \\ \\ \ell_3-2\ell_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \ell_1-\ell_3$$

$$\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \\ z=2 \end{cases} \qquad S=\{(3;-1;2)\}$$

$S_3$ : $\begin{cases} x+3y+z-5t=-3 \\ -3x+y-2z+t=3 \\ 2x+4y+z-3t=1 \\ x-2y+z-3t=-6 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & -5 & -3 \\ -3 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -3 & -6 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 10 & 1 & -14 & -6 \\ 0 & -2 & -1 & 7 & 7 \\ 0 & -5 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \ell_2+3\ell_1 \\ \ell_3-2\ell_1 \\ \ell_4-\ell_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 8 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 7 & 7 \\ 0 & -5 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right) \ell_2+\ell_3 \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 8 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & -7 & -1 & 9 & 4 \\ 0 & -5 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right) \ell_3+\ell_4$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & -7 & -1 & 9 & 4 \\ 0 & -5 & 0 & 2 & -3 \end{array}\right) \ell_2+\ell_3 \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -8 & 23 & 39 \\ 0 & 0 & -5 & 12 & 22 \end{array}\right) \begin{array}{l} \ell_3+7\ell_2 \\ \ell_4+5\ell_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -8 & 23 & 39 \\ 0 & 0 & -5 & 12 & 22 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -11 \\ 0 & 1 & -1 & \end{pmatrix} \quad l_1 - 3l_2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -5 \\ -3 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & -5 \\ -3 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = +1 \times \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix}}_{\text{A sans la ligne et colonne de "+1"}} - 3 \times \begin{vmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} - (-5) \times \begin{vmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

trop long !

## MPG pour déterminant

- travail sur lignes <u>et</u> sur colonne.
- la ligne ou la colonne à modifier ne doit pas être "multipliée"

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & -5 \\ -3 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & -5 \\ -1 & 7 & 0 & 9 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{matrix}$$

$C_3$

$$= +1 \times \begin{vmatrix} -1 & 7 & -9 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 8 & -7 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} l_1 \leftarrow l_1 + l_2 \\ l_2 \leftarrow l_2 \\ l_3 \leftarrow l_3 \end{matrix}$$

$$= -1 \times \begin{vmatrix} 8 & -7 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -1(16 - 35)$$

$$= 19$$

# TD 1

## Exercice n°3

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 1 \\ 9 & 7 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det M = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 & 0 \\ -3 & 7 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \ell_1 - \ell_3 \\ \ell_2 - 3\ell_3 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$= -1 \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \ell_2 + \ell_3 \\ \\ \end{matrix}$$

$$= -3 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -3 \times 12 = -36$$

## Exercice n°4

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \ell_2 - 2\ell_1 \\ \ell_3 - 3\ell_1 \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

## Exercice n°6 :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \\ 1 & 5 & 15 & 35 \end{pmatrix}$$

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \\ 1 & 5 & 15 & 35 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 7 & 16 \\ 0 & 3 & 12 & 31 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \ell_2 - \ell_1 \\ \ell_3 - \ell_1 \\ \ell_4 - \ell_1 \end{matrix}$$

$$= 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 7 & 16 \\ 3 & 12 & 31 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 13 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \ell_2 - 2\ell_1 \\ \ell_3 - 3\ell_1 \end{matrix}$$

$$= 1 \times 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 13 \end{vmatrix} = (13 - 12) \times 1 \times 1 = \boxed{1}$$

# TD n°2

## Diagonalisation d'une matrice

But : Soit $M$ une matrice carrée.

Existe-t-il une matrice diagonale $\Delta$ semblable à $M$ ?

($\exists P$, inversible t.q. $M = P \Delta P^{-1}$)

## Méthode pour diagonaliser

① Recherche des valeurs propres de $M$ :

$\lambda$ vp de $M \Leftrightarrow \exists \vec{v} \neq \vec{0}$, $M\vec{v} = \lambda \vec{v}$

dans ce cas, $\vec{v}$ est un vecteur propre associé.

en pratique : il faut résoudre l'équation $\det(M - \lambda I) = 0$

② Recherche des vecteurs propres associés aux vp de $M$

On cherche $v$ t.q. $Mv = \lambda v$

en pratique : pour chaque vp $\lambda$, on résout $Mv = \lambda v$

Sous espace propre associé à $\lambda$ : $E_\lambda$ = ensemble des $\vec{v}p$ associés à $\lambda$.

③ Si $\sum \dim E_\lambda = \dim$ espace

$\rightarrow M$ diagonalisable et $\Delta = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$

sinon $\rightarrow M$ non diagonalisable.

Exemple :

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

• On recherche des vp de $M$

On résoud :

$$\det(M - \lambda I) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & 3 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 3-\lambda \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \ell_2 + \ell_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \\ 1 & 1+\lambda & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$C_2 \leftarrow C_2 - C_3$$

$$\Leftrightarrow -(3-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ 1 & 1+\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (-3+\lambda)\left[(1-\lambda)(1+\lambda)+3\right] = 0$$

$$(\lambda-3)(-\lambda^2+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda - 3 = 0 \text{ ou } -\lambda^2 + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\lambda - 3} \text{ ou } \lambda^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 3 \text{ ou } \lambda = 2 \text{ ou } \lambda = -2$$

vp de M : 3 ; 2 et -2

$\mathrm{Tr}\, M = \Sigma\, vp$

* <u>recherche des vecteurs propres</u>

$\boxed{\lambda = 3}$

On cherche $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $Mv = \lambda v = 3v$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \\ 3z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 3x \\ -x + 2y + 3z = 3y \\ x + y = 3z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 2y + z = 0 \\ -x - y + 3z = 0 \\ x + y - 3z = 0 \end{cases}$$

$l_1 \leftrightarrow l_3$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 \\ \hline -2 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right)$ (on a passé $l_3$ en $l_1$)

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} l_1 \leftarrow l_1 \\ l_2 \leftarrow 2l_1 + l_2 \\ l_3 \leftarrow l_1 + l_3 \end{array}$$

$$\begin{cases} x+y-3z=0 \\ -5z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-y \\ z=0 \end{cases}$$

vecteurs propres associés à $\lambda = 3$

$$v = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

<u>vecteurs propres unitaires ou normés</u>

$$\|v\|^2 = 1$$

$$(-y)^2 + y^2 + 0^2 = 1 \iff 2y^2 = 1$$

$$y^2 = \frac{1}{2}$$

$$y = \sqrt{\frac{1}{2}} \text{ ou } y = \pm \frac{1}{2}$$

# TD2.

## Exercice 1

On recherche les vp de $M$

résoudre $\det(M-\lambda I)=0$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 3/2 & -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ -1/2 & \frac{3}{2}-\lambda & -1/2 \\ 3/2 & 3/2 & \frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff$$

on cherche à avoir le ⊕ de 0 sur la m̂ ligne ou colonne

$C_2 \leftarrow C_2 - C_3$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ -1/2 & 2-\lambda & -1/2 \\ 3/2 & -2+\lambda & 1/2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\iff L_2 \leftarrow L_2 + L_3$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda \\ 3/2 & \ominus -2+\lambda & 1/2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff -(-2+\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\iff (2-\lambda)(\lambda^2-1) = 0$

$\iff \lambda = 2$ ou $\lambda^2 = 1$

$\iff \lambda = 2$ ou $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$

$\vec{v}$.p associés à 2

$Mv = 2v$

$$\iff \begin{cases} y+z = 2x \\ -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y - \frac{1}{2}z = 2y \\ \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z = 2z \end{cases} \qquad \begin{cases} -2x+y+z = 0 \\ -x-y-z = 0 \\ 3x-3y-3z = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} l_1 \leftarrow l_1 \\ l_2 \leftarrow 2l_1 - l_2 \\ l_3 \leftarrow 3l_1 + l_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} l_1 \leftarrow l_1 \\ l_2 \leftarrow l_2 \\ l_3 \leftarrow 2l_2 - l_3 \end{array}$$

① Recherche des vp $\lambda$

→ résoudre $\det(M - \lambda I) = 0$

② Recherche des vecteurs propres associés à $\lambda$

→ rechercher $U$ tel que $MU = \lambda U$

③ Recherche des vecteurs propres unitaires

$\|U\| = 1$ ...

# TD 2

## Exo 2.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -1-\lambda & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I)=0 \Rightarrow \begin{array}{cccc} + & - & + & \\ \end{array} \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -1-\lambda & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ -4 & -1-\lambda & 2 \\ -2 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

det d'une 3x3

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{matrix}$$

$$[(1\times5\times9)+(2\times6\times7)+(4\times3\times8)] - [(3\times5\times7)+(4\times2\times9)+(1\times6\times8)]$$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1-\lambda \\ -4 & -1-\lambda & 2 \\ -2 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \quad l_1 \leftarrow l_1 + l_3$$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1-\lambda \\ -6 & -1-\lambda & 2 \\ -4+\lambda & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$c_1 \leftarrow c_1 - c_3$$

$$= \underbrace{(1-\lambda)(1-\lambda)}_{1^2-2\lambda+\lambda^2 = (1-\lambda)^2} \begin{vmatrix} -6 & -1-\lambda \\ -4+\lambda & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)^2 \left[ [(-6)\times(-1)] - [[-4+\lambda]\times[-1-\lambda]] \right]$$

$$= (1-\lambda)^2 \left[ 6 - [4+4\lambda-\lambda-\lambda^2] \right]$$

$$= (1-\lambda)^2 \left[ +\lambda^2 - 3\lambda + 2 \right]$$

$\det(A-\lambda I)=0 \iff (1-\lambda)^2(\lambda^2-3\lambda+2)=0$

$\Rightarrow (1-\lambda)^2=0$ ou $(\lambda^2-3\lambda+2)=0$

$\Rightarrow (1-\lambda)(1-\lambda)=0$ ou $(\lambda^2-3\lambda+2)=0$

$\lambda=1$ ou $\lambda=1$ ou $\quad \Delta=b^2-4ac$

$=-3^2-4(1)(2)$

$=9-8$

$=1$

$\boxed{\lambda=1}$ ou $\boxed{\lambda=1}$ ou $\quad \boxed{\lambda=\frac{3-1}{2}}$ ou $\boxed{\lambda=\frac{3+1}{2}}$

$\lambda=1$ ou $\lambda=1$ ou $\lambda=2$

4 valeurs propres : 1, 1, 1 et 2

Vecteurs propres :

$\boxed{\lambda=1}$ $\quad U\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$

$MU=1\times U$

$\iff \begin{cases} 3x-y+z-t=x \\ y=y \\ -4x+2y-3+2t=z \\ -2x+y-z+2t=t \end{cases}$

$\begin{cases} 2x-y+z-t=0 \\ -4x+2y-2z+2t=0 \\ -2x+y-z+t=0 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x-y+z-t=0 \\ 2x-y+z-t=0 \\ 2x-y+z-t=0 \end{cases}$

$\{2x-y+z-t=0$

$t=2x-y+z$

$U=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 2x-y+z \end{pmatrix}$

$\boxed{\lambda=2:}$ $\quad AU=2U$

$\begin{cases} 3x-y+z-t=2x \\ y=2y \\ -4x+2y-3+2t=2z \\ -2x+y-z=2t \end{cases}$

$\begin{cases} x-y+z-t=0 \\ -y=0 \\ -4x+2y-3z+2t=0 \\ -2x+y-z=0 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 0 \end{matrix}$$

⋮

# TD2

Exo 3.

→ déterminer la matrice des données centrées $X^c$

→ ______ de variance-covariance. $\Sigma = \frac{1}{n} {}^t X^c . X^c$

- $\bar{x} = \frac{32}{8} = 4$

$\bar{y} = \frac{64}{8} = 8$

$n = 8$

$$X^c = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & 0 \\ -1 & 3 \\ -2 & 2 \\ 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 3 & -3 \\ 2 & 1 \\ & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 & -2 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 3 & 2 & -1 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & 0 \\ -1 & 3 \\ -2 & 2 \\ 1 & -1 \\ 2 & -3 \\ 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 36 & -5 \\ -5 & 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} & \frac{-5}{8} \\ \frac{-5}{8} & \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{vmatrix} \frac{9}{2} - \lambda & \frac{-5}{8} \\ \frac{-5}{8} & \frac{7}{2} - \lambda \end{vmatrix} = \underbrace{\lambda^2 - 8\lambda + \frac{63}{4} - \frac{25}{64}}_{2^{nd} \text{ degré}}$$

$\Delta = \frac{41}{16}$

$T_r \, \Sigma = \frac{9}{2} + \frac{7}{2} = 8$

# TD3.

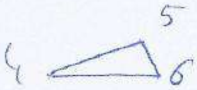
## Exo 1:

### Taille en cm

$d^2(4,5) = (60-60)^2 + (175-170)^2 + (15-14)^2 + (9-10)^2 = 0+25+1+1 = 27$

$d^2(4,6) = (60-60)^2 + (175-170)^2 + \ldots \ldots = 30$

$d^2(5,6) = \ldots = 9$




### Taille en m

$d^2(4,5) = (60-60)^2 + (1{,}75-1{,}70)^2 + (15-14)^2 + (9-10)^2 = 0+0{,}0025+1+1$
$= 2{,}0025$

$d^2(4,6) = \ldots = 5{,}0025$

$d^2(5,6) = \ldots = 9$


## Exo 2:

$d^2(A,B) = \ldots = 2534$

$d^2(A,C) = \ldots = 2818$

$d^2(C,B) = \ldots = 534$

# TD 4

XLSTAT

① Pourquoi faire un ACP?
Quel type d'ACP? (centrée ou centrée et réduite)

② Analyse de la matrice des corrélations

③ Choix des axes factoriels
- Calcul des contributions de chaque axe
- Calcul de la QGE

④ Matrice de saturation
-> Analyse des cercles et de la matrice

⑤ Matrice des composantes principales
- Choix des individus intéressants
- représentation graphique
- analyse

⑥ Conclusion.

① ACP: - variables quantitatives
- —— de m̂ importance

réduite car: - ≠ d'unités
- ≠ ordre de grandeur
- ≠ dispersion (écart-type ACCE et Vieux)

② Analyse de la matrice des corrélations.

| + forte corrélat° | | + forte anticorrélat° |
|---|---|---|
| PI - CPIS<br>CPIS - pop<br>pop - PI<br>PI - Jeunes<br>Vieux - Agri | Vieux.<br>ACCE | PI - Vieux<br>Vieux - Jeunes<br>PI - Agri<br>Vieux - Pop |

③ Consultation de l'axe 1

$\frac{4,725}{10} \times 100 = 47,25\,\%$

—— axe 2 :

$\frac{1,927}{10} \times 100 = 19,27\,\%$

—— axe 3

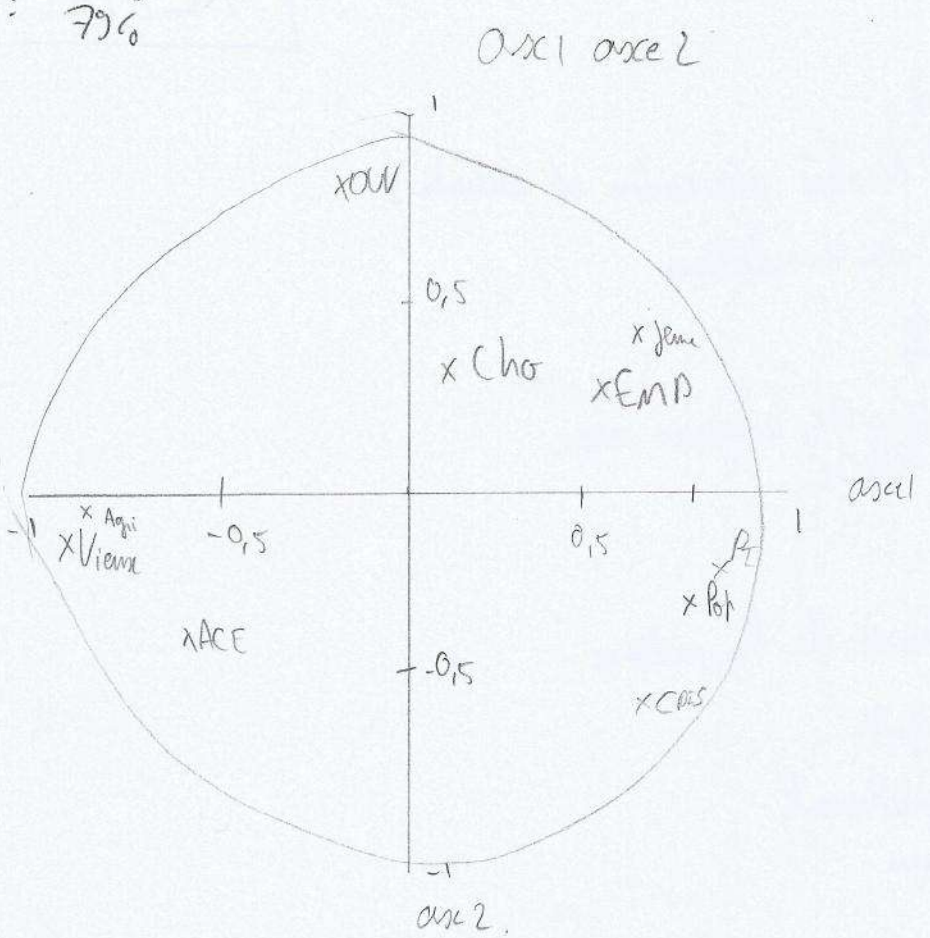
$\frac{1,245}{10} \times 100 = 12,45\,\%$

$\simeq 66,5\,\%$

$\simeq 79\,\%$

QGE : 79%

④




axe 1:

Vieux
Agri
(ACCE)

\- Pop
PI
CPIS
jeunes

axe 2:

ouvrier

axe 3

Cho.

5

$$A = \left[ a_{ij} \right]_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq m}} \qquad B = \left[ b_{ij} \right]_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq m}}$$

$$AB = \left[ \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \times b_{kj} \right]_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq m}}$$

$$T^* = {}^t X^* X^*$$

$$(Bc) \quad X^* = \left[ \frac{f_{ij}}{\sqrt{f_{i.} \times f_{.j}}} \right]_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

$$(Ac) \quad {}^t X^* = \left[ \frac{f_{ij}}{f_{j.} \times f_{.j}} \right]_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq m}}$$

$$T^*_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \frac{f_{ki}}{\sqrt{f_{k.}\, f_{.j}}} \times \frac{f_{kj}}{\sqrt{f_{k.}\, f_{.j}}} = \frac{1}{\sqrt{f_{.i}\, f_{j.}}} \sum_{k=1}^{n} \frac{f_{ki}\, f_{kj}}{f_{k.}}$$

Soit $G = \left[ \frac{f_{\cdot j}}{\sqrt{f_{\cdot j}}} \right]_{1 \leq j \leq p}$

$$T^* G = \left[ \sum_{j=1}^{p} T^*_{ij} \times \frac{f_{\cdot j}}{\sqrt{f_{\cdot j}}} \right]_{1 \leq i \leq p}$$

$$\sum_{j=1}^{p} T^*_{ij} \sqrt{f_{\cdot j}} = \sum_{j=1}$$

$$\sum_{j=1}^{p} T^*_{ij} \times \sqrt{f_{\cdot j}} = \sum_{j=1}^{p}$$