DE « Energie, entropie et information » L2 2015/2016

Vendredi 3 juin 2016 Durée 1h45

Aucun document ni calculatrice autorisés

Les réponses doivent être claires et bien rédigées : la qualité de la rédaction interviendra dans la note finale. Le barème est donné à titre indicatif et sera susceptible d'être modifié.

Questions de cours

(5 points)

1. Donner l'expression de la redondance d'une source définie par N éléments de probabilité p_i, en fonction de N et des probabilités p_i.
2. Donner l'expression de l'efficacité d'un codage de longueur L d'une source de N éléments équiprobables, en fonction de L et de N.
3. Connaissant le débit d'une source (en symb/s), comment calcule-t-on le taux d'émission (en bit/s) d'une source ? Quel est le taux d'émission (en bit/s) en sortie de codeur ?
4. Représenter graphiquement les différentes entropies marginales, conditionnelles et conjointes de deux sources dépendantes S et S'.
5. Comment calcule-t-on l'information transmise par un canal ?

Exercice

Une source S émet 3 symboles (A, B, C) avec les probabilités $p(A)=p(B)=1/5$ et $p(C)=3/5$. Son débit est de $3{,}6.10^6$ symboles par heure. On souhaite transmettre ces symboles à travers un canal dont la cadence est de 1300 bit/s.

1. On souhaite savoir si ce canal peut transmettre la totalité de l'information de cette source.

(3 points)

a) Calculer l'entropie $H(S)$ de cette source.
b) Calculer la redondance R de cette source.
c) Calculer le débit D_s (en symb/s) de cette source.
d) Calculer le taux d'émission T_s (en bit/s) de cette source.
e) Ce canal peut-il transmettre la totalité de l'information de cette source ? Justifier.

Plusieurs codages vont être testés. Chaque codage étant indépendant, les questions relatives à chaque codage sont donc indépendantes.

***Information importante** : dans les codages de Shannon-Fano, si il y a deux manières de découper un groupe de symboles en 2 sous-groupes, privilégier le sous-groupe supérieur le plus petit en nombre de symbole. Exemple :*

on choisira

1/6	X_1	0
1/6	X_2	1
1/6	X_3	1

au lieu de

1/6	X_1	0
1/6	X_2	0
1/6	X_3	1

2 On teste d'abord un codage direct de longueur fixe de cette source S. *(2 points)*

a) Quelle est la longueur moyenne L_1 de ce codage ?

b) Donner les mots-codes de chaque symbole.

c) Quel est le taux d'émission T_{C1} en sortie de ce codeur.

d) Le message ainsi codé peut-il être transmis ? Justifier votre réponse.

3 On teste ensuite un codage de Shannon-Fano de cette source S. *(4 points)*

a) Effectuer ce codage, donner les mots-codes de chaque symbole et tracer l'arbre.

b) Quelle est la longueur moyenne L_2 de ce codage ?

c) Quel est le taux d'émission T_{C2} en sortie de ce codeur.

d) Le message ainsi codé peut-il être transmis ? Justifier votre réponse.

4 On teste ensuite un codage de Shannon-Fano par bloc de *2* de cette source S. *(6 points)*

a) Définir la source S' d'extension d'ordre 2 (nombre de symboles et probabilités).

b) Effectuer le codage de Shannon-Fano de cette source S'. Donner les codes de chaque symbole de la source S' et tracer l'arbre de ce codage.

c) Après avoir calculé la longueur moyenne de ce codage par bloc, en déduire la longueur moyenne L_3 du codage de la source S.

d) Quel est le taux d'émission T_{C3} en sortie de ce codeur ?

e) Le message ainsi codé peut-il être transmis ? Justifier votre réponse.

Aide numérique : $\log_2 3 = 1{,}6$ $\log_2 5 \sim 2{,}3$