Probabilités et entropie probabiliste : Boltzmann

Proba conditionnelle / mutuelle

X, Y deux événements, si il y a un lien P(x) va dépendre de Y

$P(Y) \neq 0$

$$\underbrace{p(X|Y)}_{X \text{ sachant } Y} = \frac{p(X \cap Y)}{p(Y)} \quad \begin{array}{l}) \text{ X et Y} \\ ) \text{ proba marginale de Y} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow p(x_i | y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)}$$

$p(X|Y) \Rightarrow p(Y) \neq 0$

$p(Y|X) \Rightarrow p(X) \neq 0$

Entropie conjointe

c'est la qtité d'information conjointe moyenne des 2 caractères $(x_1 \dots x_n)$ et $(y_1 \dots y_m)$

$$H(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j) \log\left(\frac{1}{p(x_i, y_j)}\right)$$

X et Y indé $\Rightarrow p(x_i, y_j) = p(x_i)\,p(y_j) \Rightarrow H(X,Y) = H(X) + H(Y)$

Entropie conditionnelle (équivocation)

c'est la qtité d'information de l'indétermination de l'ent X qui se maintient après la connaissance de Y.

$$H(X|Y) = -\sum_{j=1}^{m} p(y_j)\, H(X|y_j)$$

avec $$H(X|y_j) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i|y_j) \log_2\left(\frac{1}{p(x_i|y_j)}\right) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i|y_j)\, I(x_i|y_j)$$

- $H(X|Y) < H(X)$
- $H(X|Y) = H(X) - I(X,Y)$

Redondance ... maximale d'une source S de N symboles

Théorème de Bayes

$$p(x|y) = \frac{p(y|x)\,p(x)}{p(y)}$$

$$p(x_i, y_j) = p(x_i|y_j)\,p(y_j) = p(y_j|x_i)\,p(x_i)$$

Formule de Boltzmann

Entropie : désordre dans un système fermé (sans échange avec l'ouv) et grand nombre de particules

$$S = k \ln(\Omega)$$

Ω : nb de micro-états différents

Entropie thermodynamique

La chaleur

transfert énergétique effectué par des chocs moléculaires désordonnés → eq T

$$Q = m C_v \Delta t \qquad \Delta t \neq 0$$

$$Q = m L \qquad \Delta t = 0$$

adiabatique $\Sigma q = 0$
isotherme $\Delta t = 0$

1er principe de thermo

variation de l'énergie interne → elle est indestructible

$$\Delta U = Q + W$$

W → énergie mécanique
Q → énergie thermique

isotherme : $\Delta U = 0$ isochore : $W = 0$ adiabatique : $\Delta U = \pm W$ (+ compression, − expansion)

2e principe thermo

Dans un système isolé $S \nearrow$, les actions et transformations sont irréversibles

$$\Delta S = S_{créé} + S_{échangée} = \int_{ti}^{tf} \frac{\partial Q}{T} = \int_{ti}^{tf} \frac{mC}{T}\,dt$$

$\Delta S > 0$: irréversible
$\Delta S = 0$: réversible
$\Delta S < 0$: impossible

Energie thermique (= agitation)

énergie d'agitation thermique au niveau moléculaire

$$E = \sum_{molécules} \frac{1}{2} m v^2_{molécule}$$

Puissance

$$P = \frac{dU}{dT}$$

Entropie et théorie de l'information

Quantité d'information / Shannon

Information d'un symbole x_k de proba p_k est

$$I(x_k) = \log\left(\frac{1}{p_k}\right)$$

l'unité varie suivant la base

entropie de Shannon : Source S $(s_1 \dots s_N) \to (p_1 \cdots p_N)$

$$H(S) = \sum_{i=1}^{N} p_k \log_2\left(\frac{1}{p_k}\right)$$

bits/symbole

$\equiv \langle I \rangle$ information moyenne

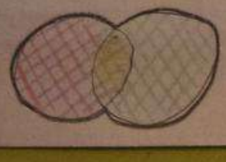
Information mutuelle

Quantité d'info partagée par X et Y

$$I(X,Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j) \log\left(\frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)\,p(y_j)}\right)$$

c'est l'incertitude moyenne de X diminuée de celle qui subsiste quand Y est connu

X et Y indé : $I(X,Y) = 0$ $X = Y$: $I(X,Y) = H(X) = H(Y)$



H(X)
H(Y)
H(X|Y)
H(Y|X)
I(X,Y)
H(X,Y)

Codage Source (Shannon / Huffman)

Shannon-fano

- Ordonner les symboles par probabilité ↘
- Séparer le groupe en 2 proba ≈ → 0, → 1
- Recommencer

maximise l'entropie

Huffman

- Ordonner les symboles par proba ↘
- Sommer les 2 + petites proba → nouveau groupe
- Recommencer → 2 groupes
- attribuer 1 au + probable 0 à l'autre
- recommencer sur les sous-groupes

instantané, reversible et compact

Caractéristique d'un codage

Longueur moyenne $L = \sum_{k=1}^{N} p_k l_k$

——— minimale $L = \text{int}[\log_2(N)] + 1$ pour N symboles

——— optimale $H(x) \leq L_x < H(x) + 1$

Capacité quantité d'information pouvant être transmise

$$C = H(N) D_c = \log_2(N) D_c$$

Vitesse $V = \dfrac{D_c}{L}$ symb/s

——— max $V = \dfrac{C}{H(s)}$ ou D_c

Efficacité ++ si le nb de codes possibles inutilisés est bas

$$\eta = \frac{H(x)}{L} = \frac{J \cdot H(x)}{L_{bloc}}$$

pour un codage par bloc de J symboles

Redondance

c'est l'écart entre l'entropie et l'entropie maximale d'une source S de N symboles

$$R(S) = 1 - \frac{H(S)}{H_A(N)}$$

avec $H_A(N) = \log_2(N)$

Taux d'émission

Qtité d'info transmise pendant 1 seconde

$$T = H(S) D_s$$

$T > C$: transmission impossible

$T \leq C$: ——— possible

$T = L D_s \leq D_c$: on peut utiliser un codage direct

Débit moyen

$$Q = \frac{H(x)}{\tau_s}$$

cadence d'émission

D_s : débit / symbole symb/sec

D_c : ——— code codes/sec

Canal bruité :

$H(x)$: entropie en l'absence de bruit

$H(x|Y)$: quantité d'info non transmise

$I(x, Y)$: entropie réellement transmise