

Chapitre 1 Automates finis

Introduction

Alan Turing a décrit à 1936 un modèle de "machine idéale" auquel il a laissé son nom.

Une **machine de Turing** est un modèle abstrait du fonctionnement des appareils mécaniques de calcul, tel un [ordinateur](#) et sa mémoire, créé par [Alan Turing](#) en vue de donner une définition précise au concept d'[algorithme](#) ou « procédure mécanique ». Ce modèle est toujours largement utilisé en [informatique théorique](#), en particulier pour résoudre les problèmes de [complexité algorithmique](#) et de [calculabilité](#).

La [thèse Church-Turing](#) affirme que tout problème de calcul fondé sur une procédure algorithmique peut être résolu par une machine de Turing.

Définition de la machine de Turing

La mise en œuvre concrète d'une machine de Turing est réalisée avec les éléments suivants :

1. Un « ruban » divisé en cases consécutives. Chaque case contient un symbole parmi un [alphabet](#) fini. L'alphabet contient un symbole spécial « blanc » ('0' dans les exemples qui suivent), et un ou plusieurs autres symboles. Le ruban est supposé être de longueur infinie vers la gauche ou vers la droite, en d'autres termes la machine doit toujours avoir assez de longueur de ruban pour son exécution. On considère que les cases non encore écrites du ruban contiennent le symbole « blanc ».
2. Une « tête de lecture/écriture » qui peut lire et écrire les symboles sur le ruban, et se déplacer vers la gauche ou vers la droite du ruban.
3. Un « registre d'état » qui mémorise l'état courant de la machine de Turing. Le nombre d'états possibles est toujours fini, et il existe un état spécial appelé « état de départ » qui est l'état initial de la machine avant son exécution.
4. Une « table d'actions » qui indique à la machine quel symbole écrire, comment déplacer la tête de lecture ('G' pour une case vers la gauche, 'D' pour une case vers la droite), et quel est le nouvel état, en fonction du symbole lu sur le ruban et de l'état courant de la machine. Si aucune action n'existe pour une combinaison donnée d'un symbole lu et d'un état courant, la machine s'arrête.

Exemple

La machine de Turing qui suit possède un alphabet $\{ '0', '1' \}$, '0' étant le « blanc ». On suppose que le ruban contient une série de '1', et que la tête de lecture/écriture se trouve initialement au-dessus du '1' le plus à gauche. Cette machine a pour effet de doubler le nombre de '1', en intercalant un '0' entre les deux séries. Par exemple, « 111 » devient « 1110111 ».

L'ensemble d'états possibles de la machine est $\{e1, e2, e3, e4, e5\}$ et l'état initial est e1.

La table d'actions est la suivante :

Exemple de table de transition				
Ancien état	Symbole lu	Symbole écrit	Mouvement	Nouvel état
e1	0	(Arrêt)		
	1	0	Droite	e2
e2	1	1	Droite	e2
	0	0	Droite	e3
e3	1	1	Droite	e3
	0	1	Gauche	e4
e4	1	1	Gauche	e4
	0	0	Gauche	e5
e5	1	1	Gauche	e5
	0	1	Droite	e1

Le comportement de cette machine peut être décrit comme une boucle :

- Elle démarre son exécution dans l'état e1, remplace le premier 1 par un 0 et se déplace vers la droite.
- Dans l'état e2 elle se déplace vers la droite, en sautant les 1 (un seul dans cet exemple) jusqu'à rencontrer un 0 (ou un blanc), et passe alors dans l'état e3.
- L'état e3 est alors utilisé pour sauter la séquence suivante de 1 (initialement aucun) et remplacer le premier 0 rencontré par un 1.
- L'état e4 permet de revenir vers la gauche jusqu'à trouver un 0, et passer dans l'état e5.
- L'état e5 permet ensuite à nouveau de se déplacer vers la gauche jusqu'à trouver un 0, écrit au départ par l'état e1.
- La machine remplace alors ce 0 par un 1, se déplace d'une case vers la droite et passe à nouveau dans l'état e1 pour une nouvelle itération de la boucle.

Ce processus se répète jusqu'à ce que e1 tombe sur un 0 (c'est le 0 du milieu entre les deux séquences de 1) ; à ce moment, la machine s'arrête.

Exécution (1)			Exécution (2)			Exécution (3)			Exécution (4)		
Étape	État	Ruban	Étape	État	Ruban	Étape	État	Ruban	Étape	État	Ruban
1	e1	11	5	e4	101	9	e2	1001	13	e4	10011
2	e2	1	6	e5	101	10	e3	1001	14	e5	10011
3	e2	10	7	e5	101	11	e3	10010	15	e1	11011
4	e3	100	8	e1	1101	12	e4	10011	(Arrêt)		

D'autres modèles ont été proposés, qui sont tous équivalents à la machine de Turing. Church a démontré dans sa thèse que ces modèles sont les plus généraux possibles.

Ces travaux amenèrent à distinguer entre les fonctions qui sont calculables en théorie de celles qui ne le seraient même pas. (Toute fonction calculable peut être calculée par la machine de Turing en temps (nombre d'opérations) fini).

Il est assez aisé de simuler une machine de Turing sur un ordinateur moderne, jusqu'au moment où la mémoire de l'ordinateur devient éventuellement pleine (si la machine de Turing utilise une très grande partie du ruban) !

Il est aussi possible de construire une machine de Turing purement mécanique. Le mathématicien Karl Scherer en construisit une en 1986, en utilisant des jeux de construction en métal et en plastique, ainsi que du bois. Sa machine, haute d'un mètre et demi, utilise des ficelles pour lire, déplacer et écrire les données (représentées à l'aide de roulements à billes).

La machine est actuellement exposée dans le hall du département d'informatique de l'Université d'Heidelberg en Allemagne.

De même, en utilisant environ 300 miroirs, il est possible de créer une machine de Turing universelle optique en utilisant la méthode dite du fer à cheval, conçue par Stephen Smale

Automates finis

Un modèle beaucoup plus simple et moins universel, mais fort utile quand-même, est celui d'un **automate fini**. Un automate fini (AF) traite des **mots** fournis en entrée : il les **reconnait** ou il **ne les reconnaît pas**.

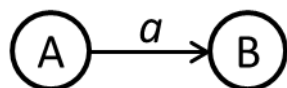
Ceci ne constitue pas une définition. Pour arriver à une définition, il faut définir ce que c'est un mot, ce que c'est reconnaître, et expliquer la construction et le fonctionnement d'un automate fini.

Description semi-qualitative

On dispose d'un **alphabet** : un ensemble fini d'objets appelés **caractères**. Un *caractère* peut être un vrai caractère, comme 'a' ou 'b', mais il peut être une instruction, un mot, un graphe, n'importe quoi... à condition que le nombre total de caractères soit fini.

Une séquence ordonnée de caractères s'appelle un **mot**. (On peut considérer des mots de longueur infinie, et ceux-ci peuvent être traités par des automates finis élaborés pour le faire, mais dans le cadre de notre cours les mots sont de longueur (nombre de caractères) finie).

Donc d'un côté on a des mots. De l'autre côté on a un **automate fini**: ensemble fini d'**états** liés par des **transitions**. Toute transition est étiquetée par un caractère, et signifie qu'on peut passer de l'état d'où elle sort vers l'état où elle entre en **lisant** le caractère qui la marque :

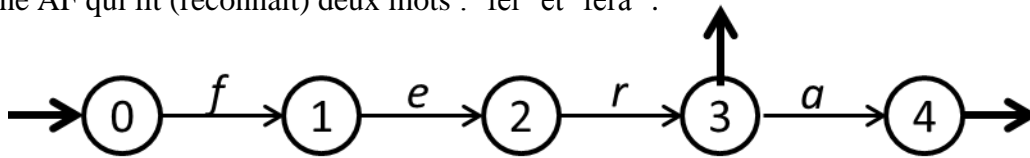


Ce graphique veut dire que pour passer de l'état A à l'état B, il faut lire le caractère 'a'. Mais pour arriver à l'état A, il fallait aussi lire quelque chose ? Oui, à moins que l'état A ne soit **initial**. Si l'état A **reconnait** un certain ensemble de mots (sur ce dessin, on ne le voit pas car on a juste séparé deux états de l'automate qui

en comporte plus), l'état B reconnaît tout mot reconnu par A suivi du caractère 'a'. (Si, par exemple, A reconnaît 'fer', B reconnaît 'fera'.)

Certains états sont **initiaux** (des **entrées**). Pour y arriver, il n'est pas nécessaire de lire quelque chose.

Voici une AF qui lit (reconnait) deux mots : 'fer' et 'fera' :



Automate A_1

L'état 0 est initial. Ici, il ne reconnaît aucun caractère (mais on verra plus tard qu'il reconnaît **le mot vide**, qui n'est pas considéré comme caractère). L'état 1 reconnaît le mot de longueur 1, 'f'. L'état 2 reconnaît le mot 'fe'. L'état 3 reconnaît 'fer', et l'état 4, 'fera'. Les états 3 et 4 sont **terminaux (accepteurs, sorties)**, et c'est eux qui déterminent ce que reconnaît l'automate.

L'ensemble des mots reconnus par l'automate s'appelle son **langage**. Le langage de l'automate A_1 est $L_{A_1} = \{ 'fer', 'fera' \}$, et dans ce cas particulier il est fini, mais dans la plupart des cas le langage d'un AF est infini.

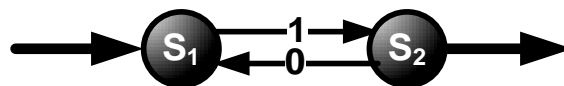
Un automate et son langage sont définis sur un alphabet, lequel ? Dans ce cas particulier, on peut soit considérer que c'est l'alphabet latin (26 lettres), ou bien qu'il consiste juste en 4 lettres $\{ a, e, f, r \}$.

Décrivons un peu plus en détail le fonctionnement d'un AF. Nous allons adopter d'abord un regard « dynamique », où on le représente comme une séquence d'évènements ; puis on va voir que ce n'est pas toujours la meilleure façon de regarder les choses.

Regard dynamique

Un mot « arrive » dans l'automate fini, c.à.d. dans une de ses entrées. Puis l'automate passe d'état en état, suivant les transitions, à la lecture de chaque lettre du mot, si cette lettre correspond à une transition disponible pour l'état actuel.

Voici un autre exemple très simple d'un AF :



Ici, pour le mot à l'entrée '1010101' (la lecture se fait à partir de la gauche), l'automate passe successivement par les états $s_1 s_2 s_1 s_2 s_1 s_2 s_1 s_2$:

$$s_1 \xrightarrow{1} s_2 \xrightarrow{0} s_1 \xrightarrow{1} s_2 \xrightarrow{0} s_1 \xrightarrow{1} s_2 \xrightarrow{0} s_1 \xrightarrow{1} s_2$$

L'état s_2 étant terminal (accepteur), l'automate accepte (lit, reconnaît) le mot '1010101'. En fait, il reconnaît tout mot composé de 0 et de 1 qui commence par un 1 et se termine par un 1, avec une stricte alternance de 0

et de 1. Le langage de A_2 est $L_{A_2} = \{101, 10101, 1010101, \dots\}$, il est infini. Ce langage est défini sur l'alphabet $A = \{0, 1\}$.

Le mot arrivant à un état terminal (état accepteur), il est accepté (lu, reconnu) par l'automate. Le mot 101010 n'arrivera pas à un état terminal, il ne sera donc pas reconnu. La lecture du mot 01 s'arrêtera au premier caractère, car il n'y a pas de transition $s_1 \xrightarrow{0} s_2$; il ne sera pas reconnu non plus. Les mots non reconnus ne font pas partie du langage de l'automate.

Les automates A_1 et A_2 sont dits « finis » car ils possèdent un nombre fini d'états distincts. Ils ne disposent donc que d'une mémoire bornée, indépendamment de la taille de la donnée (en l'occurrence, un mot) sur laquelle on effectue les calculs.

Résumons tout cela en **une définition**.

Définition d'un automate fini

Un AF est défini sur un **alphabet** A : ensemble fini de caractères. L'AF consiste en :

- Q : un ensemble fini d'états
dont certains sont initiaux et certains terminaux ; rien n'empêche à un état initial d'être en même temps terminal. Donc,
- Deux autres ensembles : l'ensemble des états initiaux I et l'ensemble des états terminaux T , qui sont, tous les deux, des sous-ensembles de l'ensemble fini des états de l'automate : $I \subset Q, T \subset Q$.
- E : un ensemble fini de **transitions**.
Chaque transition peut être considérée comme un triplet $(p.a.q)$ où p et q sont des états ($p, q \in Q$) et a est un caractère ($a \in A$) ou bien a est un **mot vide** noté ϵ dans notre cours (et noté 1 dans certains ouvrages), défini par la propriété suivante :

si w est un mot, $\epsilon w = w \epsilon = w$.

Le mot vide est le seul mot de longueur 0.

Donc $E \subset Q \times (A \cup \{\epsilon\}) \times Q$.

Une transition $(p.a.q)$ est souvent notée $p \xrightarrow{a} q$.

On peut donc dire qu'un AF est un quadruplet (Q, I, T, E) sur A , ou bien que c'est un quintuplet (A, Q, I, T, E) .

Quelques autres définitions

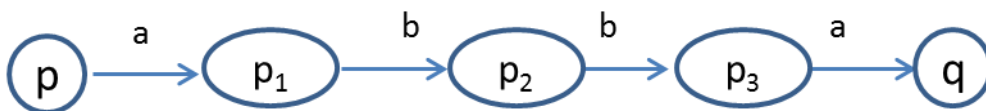
- On note A^* l'ensemble de tous les mots sur l'alphabet A , ainsi que le mot vide.

Attention : A est un alphabet, il consiste en un nombre de caractères fini.
 A^* est un ensemble infini de mots. Ne jamais les confondre !

- Un langage est **un ensemble de mots sur un alphabet donné**. Un langage peut être fini (par exemple, $L = \{ 'a', 'ab' \}$) ou infini (par exemple, $L = \{ a, aa, aaa, aaaa, \dots \}$)
La notion d'un langage est définie en dehors de toute référence à un automate.
- Un **chemin** consiste en une ou plusieurs transitions consécutives: $p \xrightarrow{w} q$ est un chemin de p à q d'étiquette w et cela signifie qu'on peut aller de p à q en lisant le mot w . Un chemin consiste en autant de transitions qu'il y a de caractères dans le mot étiquette.

Par exemple, pour $w = abba$, $p \xrightarrow{w} q$ signifie qu'il y a une suite de transitions

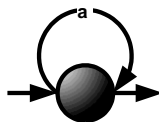
$$p \xrightarrow{a} p_1 \xrightarrow{b} p_2 \xrightarrow{b} p_3 \xrightarrow{a} q$$



- Un mot est **reconnu** par l'AF ssi il existe un chemin étiqueté par ce mot allant d'un état initial jusqu'à un état terminal.
- Le **langage reconnu** par un AF c'est l'ensemble des mots reconnu par cet AF.

Nous allons temporairement oublier la présence du mot vide (ϵ) dans la définition de l'ensemble E , jusqu'à l'introduction explicite d'automates asynchrones. Dans tous les exemples que nous allons traiter jusque ce point-là, on pourra donc définir l'ensemble E comme faisant partie de $Q \times A \times Q$.

Il n'empêche que le mot vide pourra faire partie du langage reconnu par l'automate (par exemple, l'automate suivant reconnaît les mots ϵ, a, aa, aaa etc. Il reconnaît des séquences consistant en n'importe quel nombre de a , donc il reconnaît A^* pour $A = \{ a \}$:



Comparaison avec la machine de Turing :

Une machine de Turing possède une mémoire potentiellement infinie : le ruban. Il y a aussi un élément fini de la mémoire : l'ensemble d'états et de transitions, ainsi que l'alphabet. A l'arrêt, le contenu de la mémoire ruban est modifié.

Un automate fini possède une mémoire finie : l'ensemble d'états et de transitions. Les mots fournis à l'automate, à la différence du texte sur le ruban, ne font pas partie de la mémoire, car ils ne peuvent pas être modifiés. A la fin du processus, le mot est reconnu ou non reconnu, mais non pas modifié.

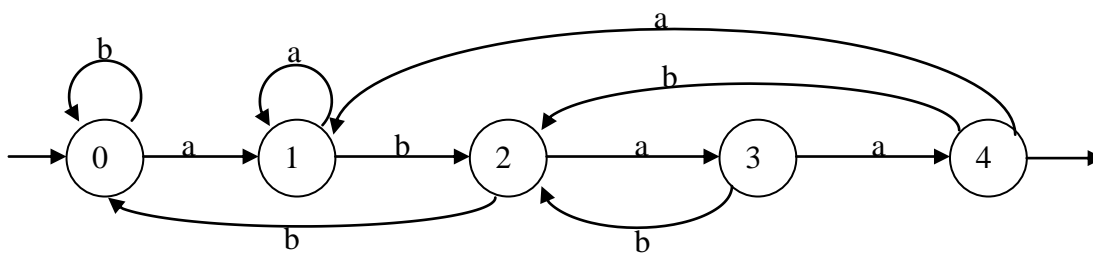
Un AF, dans sa fonction essentielle, sert à **reconnaitre un langage** (c'est à dire reconnaître tous les mots y appartenant et ne reconnaître aucun mot n'y appartenant pas). Dans notre cours, nous n'allons étudier que des AF destinés directement à cette tâche : on les appelle « **accepteurs** » (ou « **reconnaisseurs** »), ils

produisent en sortie une réponse « oui » ou « non » selon qu'ils acceptent (oui) ou rejettent (non) le mot présenté en entrée. Mais on peut généraliser cette tâche et construire d'autres types d'automates :

- Des **systèmes de reconnaissance** classent l'entrée par catégorie: au lieu de répondre par oui ou par non, ils répondent par une classification; de tels automates se rencontrent par exemple en linguistique.
- Des **capteurs** produisent un certain résultat en fonction de l'entrée.
- Des **automates pondérés** associent à chaque mot une valeur numérique.

Les automates finis fournissent un outil de construction d'algorithmes particulièrement simple. A part l'utilisation évidente des AF dans la **recherche des motifs dans un texte**, on les retrouve dans la **modélisation de processus**, le **contrôle**, les **protocoles de communication**, la **vérification de programmes**, la **théorie de la calculabilité**, dans l'**étude des langages formels** et en **compilation**.

Exemple :



Automate A_3

$$A = \{a, b\}; Q = \{0, 1, 2, 3, 4\}; I = \{0\}; T = \{4\}$$

La lecture du mot w se termine dans l'état 4 ssi w se termine par **abaa**.

L'interprétation intuitive dans le cadre du regard « dynamique » :

A chaque instant l'automate se trouve dans l'un des états p de l'ensemble d'états Q . Il lit alors l'une des lettres a de l'alphabet A (la lettre suivant du mot qui vient à l'entrée) et passe dans un état q tel que $(p.a.q)$ soit une flèche. Par exemple, si on met le mot '**aaabbbabaa**' à l'entrée, l'automate passe entre les états suivants :

$$0 \xrightarrow{a} 1 \xrightarrow{a} 1 \xrightarrow{b} 2 \xrightarrow{b} 0 \xrightarrow{b} 0 \xrightarrow{a} 1 \xrightarrow{b} 2 \xrightarrow{a} 3 \xrightarrow{a} 4 .$$

L'interprétation dans le cadre du regard « statique » :

Il existe le chemin $0 \xrightarrow{aaabbbabaa} 4$, 4 est l'état terminal, le mot '**aaabbbabaa**' est donc reconnu. Nous verrons que la deuxième interprétation est préférable s'il s'agit d'AF **non déterministes**.

Représentation d'un AF

Un automate fini peut être vu comme un **graphe orienté étiqueté**: les états sont les sommets et les transitions sont les arcs étiquetés. L'état initial est marqué par une flèche entrante; un état final est, selon les auteurs, soit marqué d'une flèche sortante, comme sur la figure ci-dessus, soit doublement cerclé. Nous avons utilisé cette représentation dans tous les exemples jusqu'à ce point.

Une autre façon commode de représenter un automate fini est sa **table de transitions**. Elle donne, pour chaque état et chaque lettre, l'état d'arrivée de la transition. Voici la table de transition de l'automate A_3 ci-dessus :

	Etat	état résultant	
		en lisant a	en lisant b
(entrée)	0	1	0
	1	1	2
	2	3	0
	3	4	2
(sortie)	4	1	2

Une troisième façon de représenter un AF est une liste de transitions, accompagnée par une liste d'états initiaux et terminaux. Voici comment on peut représenter le même automate :

$A = \{0,1\}$; $Q = \{0,1,2,3,4\}$; $I = \{0\}$; $T = \{4\}$;
 $E = \{0.a.1, 0.b.0, 1.a.1, 1.b.2, 2.a.3, 2.b.0, 3.a.4, 3.b.2, 4.a.1, 4.b.2\}$.

* * *

Exercice :

Construire un automate fini reconnaissant les entiers écrits en base 2 divisibles par 3.

Solution :

Ajout d'un 0 à la fin d'un nombre binaire le multiplie par 2.

Ajout d'un 1 à la fin d'un nombre binaire le multiplie par 2 et lui ajoute 1.

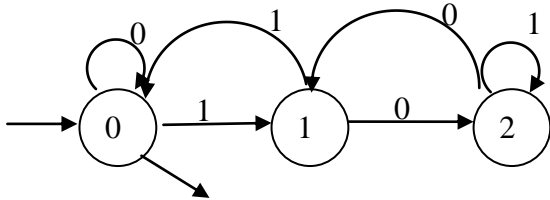
Marquant les états par le reste de la division entière par 3 :

N	N mod 3	ajout d'un 0 à la fin	reste	ajout d'un 1 à la fin	reste
$3n$	0	$6n$	0	$6n+1=3 \times 2n + 1$	1
$3n + 1$	1	$6n + 2=3 \times 2n + 2$	2	$6n+3=3 \times (2n + 1)$	0
$3n + 2$	2	$6n + 4=3 \times (2n + 1) + 1$	1	$6n+5=3 \times (2n + 1) + 2$	2

Notons les états par le reste de la division entière par 3. On obtient

Etat	0	1
0	0	1
1	2	0
2	1	2

L'entrée se fait en 0, et la sortie se fait également en 0 :



Mais en fait, cet automate est bon pour reconnaître des nombres en écriture binaire avec n'importe quel reste de la division entière par 3, au prix de choisir quel état est terminal. L'état terminal 0 correspond au reste 0 (divisibilité par 3) ; l'état terminal 1, au reste 1 ; l'état terminal 2, au reste 2.

Le seul inconvénient est qu'à part les nombres divisibles par 3, cet automate reconnaît aussi, le mot vide (ϵ) qui n'est pas un nombre, et pour lequel la notion même de divisibilité par un nombre semble assez bizarre. Peut-on y remédier ? La réponse se trouve dans la section suivante.

Standardisation des automates

Définition :

L'automate $C=(Q, I, T, E)$ sur le langage A est standard si $I=\{i\}$ et, pour tout $a \in A$ et tout $q \in Q$, $(q, a, i) \notin E$ (cela peut se formuler en mots ainsi : l'automate fini est standard s'il possède un unique état initial et si aucune transition n'aboutit dans cet état).

Le but principal de la standardisation :

Un automate standard dont l'état initial n'est pas terminal, ne reconnaît pas le mot vide. Cette propriété est évidente : pour arriver de l'état initial à un état terminal, il faut au moins passer par une des transitions partant de l'état initial, donc lire au moins un caractère.

Si l'on possède un automate standard reconnaissant un langage L qui inclut le mot vide, il suffit de transformer son état initial en un état non terminal (c.à.d d'enlever la sortie sur i) pour obtenir un automate reconnaissant exactement le même ensemble de mots **sans** le mot vide, $L \setminus \{\epsilon\}$.

Si l'on possède un automate standard reconnaissant un langage L qui n'inclut pas le mot vide, il suffit de transformer son état initial en un état terminal (c.à.d d'ajouter une sortie sur i) pour obtenir un automate reconnaissant exactement le même ensemble de mots **plus** le mot vide, $L \cup \{\epsilon\}$.



Algorithme de standardisation

On peut rendre tout automate fini non standard C standard. En ce faisant, on ne modifie pas le langage qu'il reconnaît.

Pour standardiser, on ajoute à l'automate C un nouvel état qui devient l'unique état initial et duquel, pour chacune des transitions qui partaient des anciens états initiaux, part une transition de même étiquette vers les mêmes états.

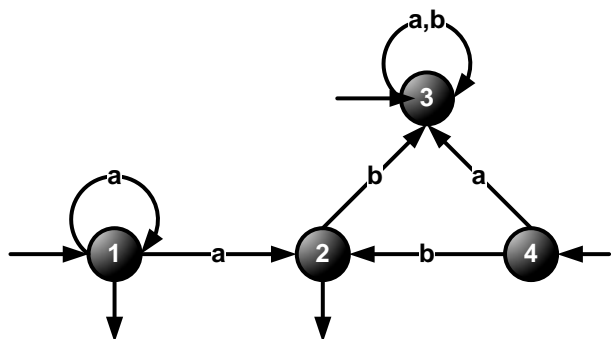
Formellement, on construit un nouvel automate $C' = (Q \cup \{i\}, \{i\}, T', E')$ (le **standardisé** de C) avec :

- $\{i\} \notin Q$;
- $T' = \begin{cases} T & \text{si } I \cap T = \emptyset \\ T \cup \{i\} & \text{si } I \cap T \neq \emptyset \end{cases}$
- $E' = E \cup \{(i.a.q) \mid \exists q_i \in I \text{ tel que } (q_i.a.q) \in E\}$

En mots : on ajoute un nouvel état i , et on ajoute des flèches vers tous les états (et qui portent les mêmes étiquettes) vers lesquels l'automate C possède des transitions partant de ces états initiaux. (En disant « tous les états », on y inclut éventuellement les états initiaux eux-mêmes). Si aucun état initial du C n'est terminal, l'ensemble d'états terminaux n'est pas modifié. Si au moins un état initial du C est terminal, le nouvel état i s'ajoute aux états terminaux.

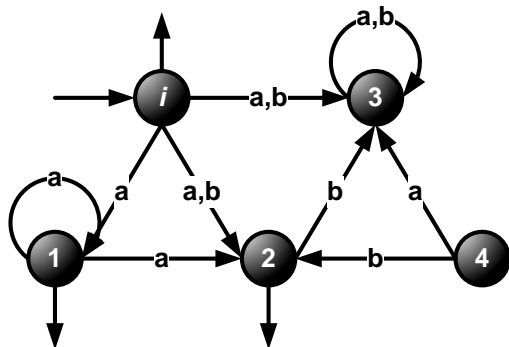
Exemple :

L'automate suivant n'est pas standard : il possède trois états initiaux et des transitions aboutissant dans chacun d'entre eux.



	état	a	b
E,S	1	1,2	--
S	2	--	3
E	3	3	3
E	4	3	2

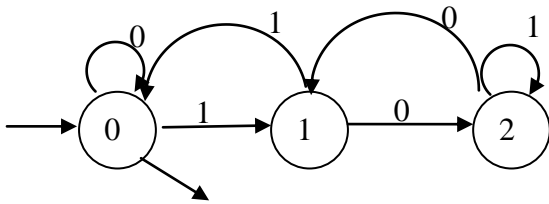
Une des entrées est une sortie ; les transitions impliquant les entrées sont $(1.a.1)$, $(1.a.2)$, $(3.a.3)$, $(3.b.3)$, $(4.a.3)$ et $(4.b.2)$. On ajoute donc l'état i qui est à la fois l'entrée unique et une des sorties, et on crée les transitions $(i.a.1)$, $(i.a.2)$, $(i.a.3)$, $(i.b.3)$, $(i.a.3)$ et $(i.b.2)$:



(En réalité, cet automate – appelons-le C' – est assez bizarre. Il contient un état **non accessible** 4 (où on ne peut pas arriver à partir de l'état initial) et un état **non coaccessible** 3 (à partir duquel on ne peut pas arriver à une sortie). Il pourrait donc être simplifié en enlevant ces deux états avec ses transitions ; en le faisant on obtient l'**émoué** du C' . Il n'empêche que cet exemple illustre bien la procédure de standardisation).

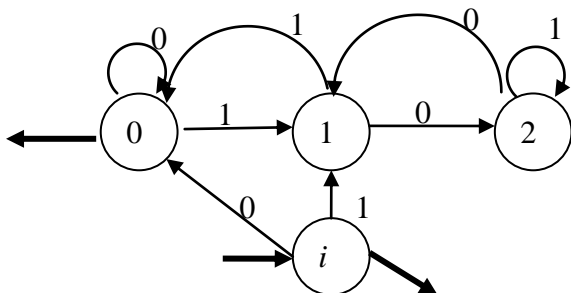
Regardons l'automate standardisé. La seule façon de laquelle il peut reconnaître le mot vide, c'est si l'état i est un état de sortie. Donc on obtient un moyen très simple de modifier un automate de telle façon qu'il cesse de reconnaître le mot vide s'il le fait : il faut le standardiser et enlever la sortie sur l'état initial.

Appliquons cette recette à l'automate

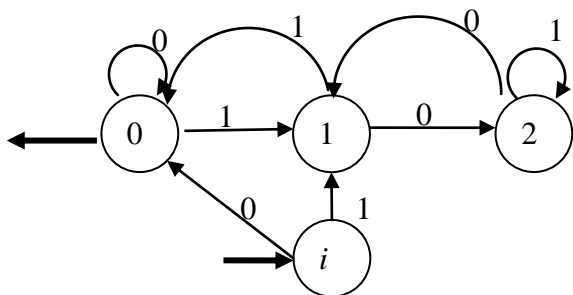


qui reconnaît tous les nombres en écriture binaire divisible par 3, mais aussi le mot vide.

Il y a un seul état d'entrée, 0. Il est également le seul état de sortie. Pour standardiser cet automate, il faut donc lui ajouter un nouvel état i qui sera un état de sortie (l'état 0 le reste aussi), et créer les transitions $(i.0.0)$ et $(i.1.1)$. On obtient le standardisé



Cet automate est équivalent à l'automate initial ; pour lui enlever la propriété de reconnaître le mot vide sans modifier le reste, il suffit d'enlever la sortie en i :



Nous avons obtenu un automate reconnaissant toutes les écritures binaires des nombres divisibles par 3, sans qu'il reconnaisse le mot vide.

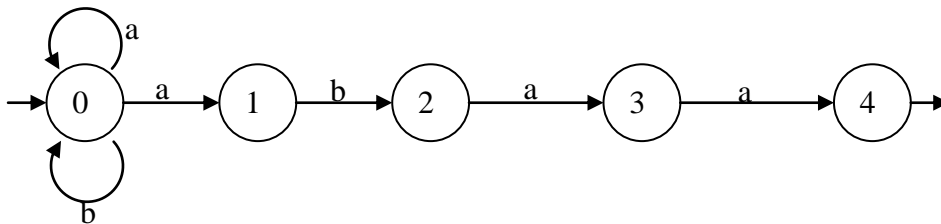
Remarques générales

1. Dans ce cours, nous allons donner *quelques* algorithmes concernant des opérations sur les automates. Il en existe d'autres algorithmes donnant les mêmes résultats (pour la minimisation, pour la complémentation, pour l'obtention du langage reconnu par l'automate donné, pour la construction d'un automate reconnaissant le langage donné, etc). Nous exigeons que vous maîtrisiez parfaitement les algorithmes propres à ce cours.
2. Nous illustrons nos idées par des exemples assez simples. Cela aide à la compréhension, mais parfois cela peut donner des idées fausses. Notamment, on pourrait se demander pourquoi on doit développer des algorithmes formels tandis que très souvent la réponse « se voit » immédiatement à partir du dessin. La vérité est que dans la vie réelle, les automates faisant partie des logiciels peuvent avoir des milliers voire des millions d'états ; rien n'est « vu », et aucun raisonnement intuitif n'est possible dans de tels cas. La seule solution consiste à développer des algorithmes programmables adaptés à n'importe quelle taille d'automate.

Automates déterministes

On distingue des automates finis déterministes et non déterministes. L'automate que nous avons montré précédemment est déterministe.

Voici l'exemple d'un automate *non déterministe* :



(Cet automate reconnaît tous les mots qui se terminent par *abaa*. Il est très facile à construire.)

Le fait qu'il n'est pas déterministe se manifeste en ce que, en lisant *a* à partir de l'état 0, on peut aller et à l'état 0, et à l'état 1, ce qui ne serait pas possible pour un automate déterministe.

On va montrer dans ce qui suit que l'on peut toujours construire, à partir d'un automate fini quelconque, un autre automate qui est déterministe et qui lui est équivalent (reconnait le même langage).

Automate déterministe, définition

L'automate $C = (Q, I, T, E)$ est déterministe ssi pour $\forall p \in Q$ et $\forall a \in A \exists$ **au plus un** état $q \in Q$ tq $(p.a.q)$, et qu'il y ait **un seul état initial** : $I = \{i\}$.

On peut donc caractériser un automate déterministe C par un quadruplet (Q, i, T, E) où i est l'état initial.

Si la transition $(p.a.q)$ existe, on notera $p.a=q$. Si elle n'existe pas, on conviendra que $p.a$ n'a pas de valeur.

On peut facilement vérifier par récurrence sur la longueur des mots que pour un automate déterministe C , pour $\forall p \in Q$ et \forall mot $u \in A^*$, il existe au plus un état $q \in Q$ tq $p \xrightarrow{u} q$.

(Cette assertion est différente de la définition ! Ici, il s'agit d'un mot et d'un chemin, tandis que la définition parle d'un caractère et d'une transition !)

On notera alors $p.u=q$ en convenant que $p.u$ n'est pas défini quand il n'existe pas de tel état q ; et on aura pour deux mots $u, v \in A^*$:

$$(p.u).v = p.(uv)$$

Déterminisation

Soit $C = (Q, I, T, E)$ un automate fini.

Notons Π l'ensemble des parties de Q . C'est un ensemble fini puisque si Q a n éléments, Π en a 2^n . (Par exemple, pour $Q = \{0, 1, 2\}$, $\Pi = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$: il y a $2^3 = 8$ parties).

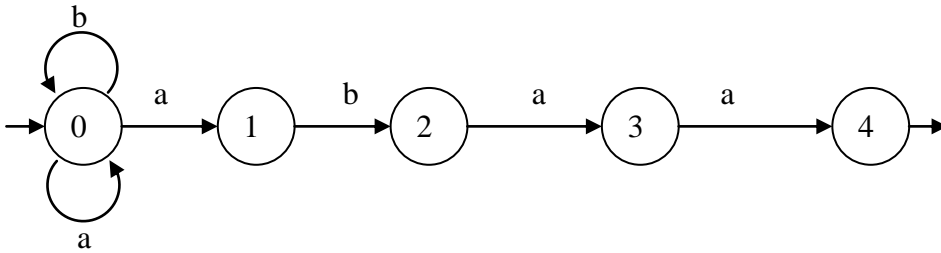
Un automate déterministe D correspondant à C prend

- comme ensemble d'états un sous-ensemble P de l'ensemble Π des parties de Q . (Donc jusqu'à 2^n états).
- comme unique état initial l'ensemble I des états initiaux de C .
- comme ensemble d'états terminaux l'ensemble $\zeta = \{u \in P \mid u \cap T \neq \emptyset\}$ des parties de Q qui contiennent au moins un état terminal de C .
- comme flèches l'ensemble des $(u.a.v)$ où $u \in P$ et v est l'ensemble de tous les états $q \in Q$ tels qu'il existe un état p dans u avec $(p.a.q) \in E$.

Donc, tout état de l'automate D déterminisé à partir de l'automate non déterministe C est un état « composé », c.à.d. il est un sous-ensemble d'états de C . Mais par souci de simplicité, nous allons noter des états composés d'un seul état sans accolades : par exemple, 0 au lieu de $\{0\}$. Il convient de ne jamais oublier donc que l'état noté, disons, 1 de D n'est pas le même état que le 1 de C .

Cet algorithme formel s'explique le plus facilement sur un exemple :

Exemple de déterminisation.



Etat	a	b
0	(0,1)	0
(0,1)	(0,1)	(0,2)
(0,2)	(0,1,3)	0
(0,1,3)	(0,1,4)	(0,2)
(0,1,4)	(0,1)	(0,2)

Rappel : la notation (0,1) veut dire {0,1} ; 0 veut dire {0} ; des fois on va écrire simplement (01) ou même 01.

Explications

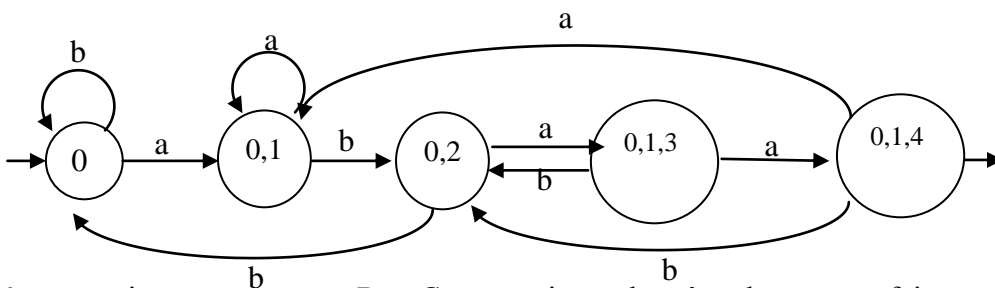
On commence par l'état initial qui dans ce cas particulier coïncide avec l'état initial de l'automate non déterministe 0, car notre automate non déterministe n'en a qu'un seul. (S'il en avait plusieurs, on les aurait regroupés pour former l'état initial de l'automate déterministe).

A partir de cet état 0, en **a** on va vers les états 0, 1 de l'automate initial. Pour l'automate déterministe, on les regroupe dans l'état qu'on appelle (0,1). En **b**, on va vers l'état 0 de l'automate initial. Donc, 0 est lui aussi un état de l'automate déterminisé.

Chaque fois qu'on obtient un état de l'automate déterminisé, on le met dans la colonne de gauche pour agir sur cet état par les lettres de l'alphabet. Ainsi on obtient la deuxième ligne, où figure un nouvel état (0,2). On procède ainsi tant qu'il y reste des états non traités.

Les états finaux sont ceux qui contiennent un état final de l'automate initial. Dans notre cas, il n'y a qu'un seul : (0,1,4).

Voici l'automate déterminisé :



La démonstration montrant que **D** et **C** reconnaissent le même langage se fait par récurrence.

Un automate déterministe peut être ou ne pas être **complet**.

Automate déterministe complet (définition) :

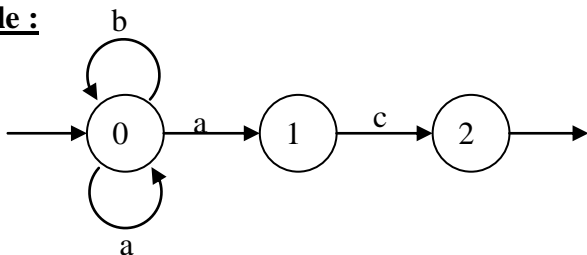
Pour $\forall u \in P$ et $\forall a \in A \exists v \in P$ tel que $u.a=v$.

C'est-à-dire que de chaque état sortent des flèches avec toutes les étiquettes possibles.

L'automate **D** de l'exemple précédent est un automate complet.

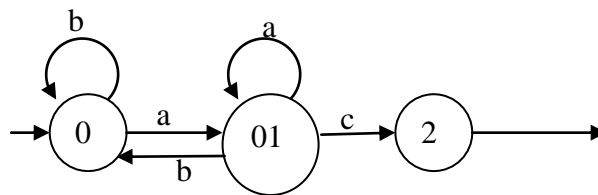
N'importe quel automate non déterministe est équivalent à un automate déterministe et complet : il suffit, dans l'automate déterminisé, d'introduire un état poubelle s'il n'est pas déjà complet.

Exemple :



Déterminisation :

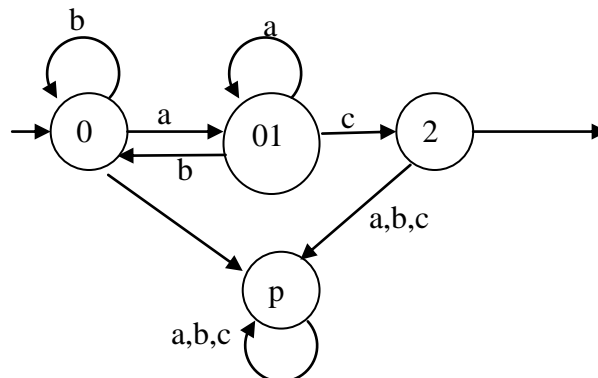
état	a	b	c
0	(0,1)	0	--
(0,1)	(0,1)	0	2
2	--	--	--



Cet automate déterministe n'est pas complet.

Remplaçons maintenant les traits (« absence de transition ») dans ce tableau par un nouvel état appelé état poubelle ou puits (P), qui a la propriété que toutes les transitions à partir de cet état reviennent sur lui-même :

état	a	b	c
0	(0,1)	0	P
(0,1)	(0,1)	0	2
2	P	P	P
P	P	P	P



Voici donc l'automate déterminisé complet. (Le fait que dans cet automate 0 est resté l'état initial, et le seul état terminal reste 2, est une coïncidence : cela ne se produit pas systématiquement, et de toute façon, rappelons-le, ce 0 n'est pas l'état 0 de l'automate non déterministe).

Remarques

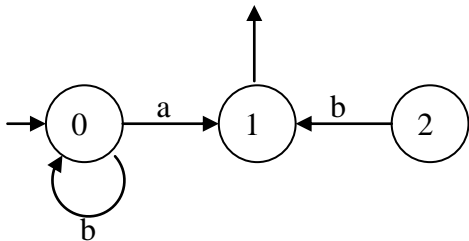
1. Il n'y a pas trop de sens de parler d'un automate non déterministe complet ou pas complet, même si cela n'est pas interdit et figure dans certains ouvrages. De même, même si introduire un « état poubelle » dans un automate non déterministe est possible et ne nuit pas à son fonctionnement, ceci n'est pas utile pour la déterminisation de cet automate. Normalement, on n'introduit un état poubelle si besoin est qu'une fois l'automate est devenu déterministe (ou directement lors de la déterminisation).
2. L'état poubelle étant un état non coaccessible (il n'y a pas de chemin menant de cet état vers une sortie), la présence ou l'absence d'état poubelle ne change rien en ce qui concerne le langage reconnu par l'automate. Il n'empêche qu'on préfère travailler avec des automates déterministes complets (donc parfois contenant un état poubelle) à cause de certaines opérations (minimisation, complémentarisation) qui figureront plus bas dans ce texte, et qui seraient difficiles à mener ou même donnant des résultats incorrectes si l'automate n'est pas complet.

Définitions diverses:

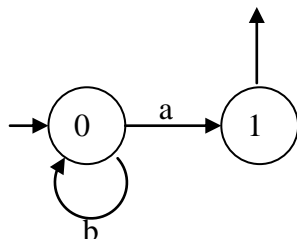
1. Un automate est **accessible** si tous les états sont accessibles (à partir de l'état initial).
2. Un automate est **coaccessible** si tous les états sont coaccessibles (à partir de n'importe quel état on peut accéder à un état terminal).
3. Accessible + coaccessible = **émondé**.
4. Un ensemble de mots X est un langage **reconnaisable** ssi il existe un automate fini D qui le reconnaît. **Ici, le mot « fini » est très important.**

Commentaires :

1. Un automate non accessible semblerait au premier vu un objet exotique. Effectivement, on peut toujours couper l'état non accessible (et éventuellement toutes les transitions qui y entrent) sans gêner au fonctionnement de l'automate. L'automate non accessible suivant :

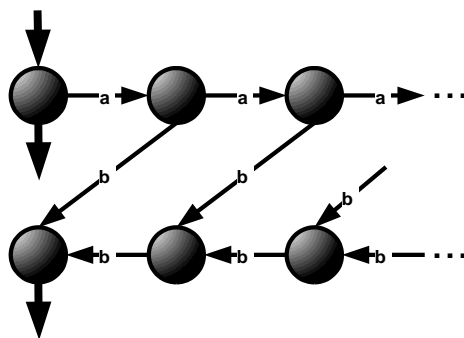


est équivalent à l'automate accessible obtenu en coupant l'état 2 et la transition 0.c.2 :



Néanmoins, la notion d'inaccessibilité n'est pas privée de sens. On peut obtenir des automates non accessibles lors des opérations dont on parlera plus bas, entre autres lors de l'obtention d'un automate reconnaissant le complément d'un langage.

2. On rencontre des automates non coaccessibles bien plus fréquemment. Notamment, tout automate déterministe complet contenant une poubelle, est non coaccessibles, car on ne peut pas atteindre une sortie à partir de la poubelle.
3. La notion d'un langage reconnaissable est intéressante car il existent bien des langages non reconnaissables. Par exemple, un langage consistant en tous les mots contenant autant de a que de b , n'est pas reconnaissable. Il en suit entre autres qu'un langage contenant des parenthèses qui doivent être bien placées (avec une parenthèse fermante pour chaque ouvrante et une bonne imbrication des parenthèses) n'est pas reconnaissable.
4. Un langage non reconnaissable peut parfois être reconnu par un automate *non fini*. Exemple : le langage consistant en tous les mots du type $a^n b^n$ (les mots où il y a autant de a que de b (sans fixer le nombre) et où tous les a précèdent à tous les b) n'est pas reconnaissable. Or, il est évidemment reconnu par l'automate infini suivant :



5. Si X est un langage reconnaissable sur l'alphabet A , on peut le reconnaître avec un automate déterministe et complet, car l'automate D figurant dans la définition du langage reconnaissable est toujours équivalent à un automate déterministe et complet F .

Ecrivant $F=(Q, i, T, E)$, on a alors $w \in X$ ssi $i.w \in T$ et donc $w \notin X$ ssi $i.w \notin T$.

Le complément d'un langage reconnaissable.

Le complément d'un langage reconnaissable (l'ensemble de mots sur le même alphabet n'appartenant pas au langage en question) est encore reconnaissable.

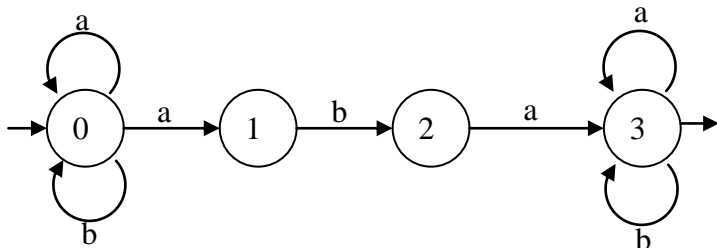
Soit D un automate déterministe et complet reconnaissant le langage X .

Pour construire un automate reconnaissant le complément de X (le langage complémentaire de X , \overline{X}), il suffit de prendre comme ensemble d'états terminaux le complément de l'ensemble d'états terminaux de D .

Exemple :

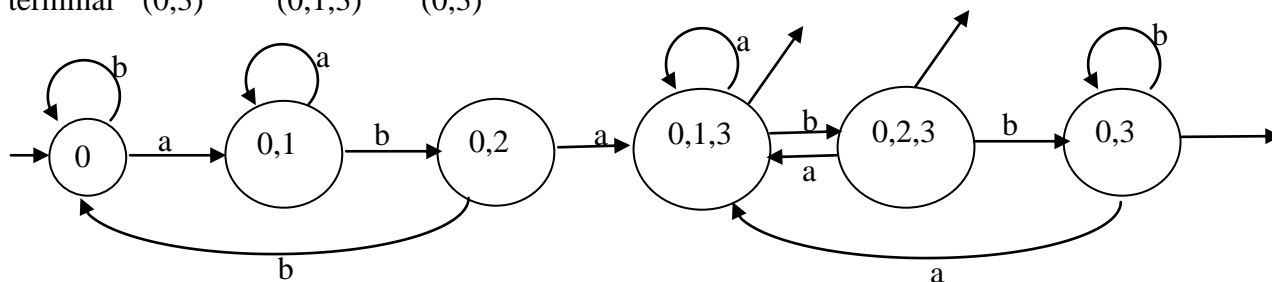
Construisons un automate sur $A=\{a,b\}$ qui reconnaît l'ensemble des mots n'ayant pas **aba** en facteur.

On commence par la construction d'un automate (non déterministe) reconnaissant tous les mots ayant **aba** en facteur.



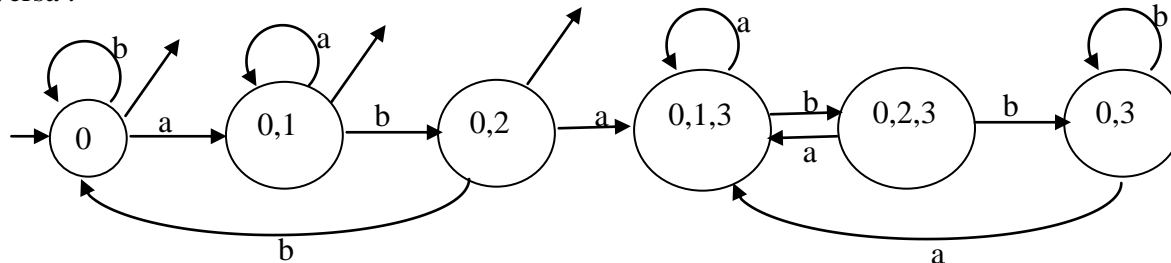
Appliquons l'algorithme de déterminisation :

	état	a	b
initial	0	(0,1)	0
	(0,1)	(0,1)	(0,2)
	(0,2)	(0,1,3)	0
terminal	(0,1,3)	(0,1,3)	(0,2,3)
terminal	(0,2,3)	(0,1,3)	(0,3)
terminal	(0,3)	(0,1,3)	(0,3)



Cet automate déterministe et complet reconnaît tous les mots ayant **aba** en facteur. Il a trois états terminaux : (0,1,3), (0,2,3) et (0,3).

Maintenant pour obtenir un automate (lui aussi déterministe et complet) reconnaissant tous les mots qui n'ont pas **aba** en facteur, il suffit de transformer tous les états terminaux en des états non terminaux, et vice versa :



Remarque : il est évident que cet automate peut être simplifié. En effet, les trois états de droite sont équivalents à un seul état poubelle. Mais il est néanmoins un automate correcte qui reconnait le langage complémentaire à celui reconnu par l'automate d'origine.

Remarque très importante :

Ici, on a obtenu un automate complet sans qu'il y ait besoin de le compléter en introduisant l'état poubelle. Evidemment, ceci n'est pas toujours le cas. **Si on a affaire à un automate non complet, on n'a pas le droit de remplacer directement les états terminaux par des états non terminaux et vice versa : il faut d'abord le compléter.** Alors l'état poubelle (qui ne peut pas être terminal) devient un état terminal de l'automate reconnaissant le complément du langage.

Minimisation

Pour tout langage reconnaissable il existe *le plus petit* (c.à.d. contenant le plus petit nombre d'états) automate déterministe qui le reconnaît, et il est *unique* : c'est l'automate minimal du langage.

Algorithme de minimisation par la méthode des équivalences est basé sur la notion de partitionnement de l'ensemble d'états de l'automate.

Principe

Tout d'abord, si l'automate à minimiser n'est pas complet, il faut lui ajouter l'état poubelle pour qu'il le devienne. Sinon on risque de faire une erreur grave, qui se manifeste facilement au cas d'un automate déterministe non complet dont tous les états sont des états terminaux (essayez le voir vous-mêmes après avoir compris l'algorithme de minimisation).

On sépare tous les états de l'automate déterministe initial en deux groupes : terminaux et non-terminaux. Puis, on analyse la table des transitions en marquant vers quel groupe va chaque transition. On repartitionne les groupes selon les patterns des transitions en terme de groupes. On répète ce processus en utilisant cette nouvelle partition, et on réitère jusqu'à ce qu'on arrive à ne plus pouvoir partitionner. Les groupes restants forment l'automate minimal. On appelle souvent les itérations les étapes.

Description du processus de partitionnement itératif

Soit

un automate fini déterministe complet $D=(Q, i, T, E)$

Résultat à obtenir: Un automate fini déterministe complet D' qui reconnaît le même langage que D et qui a aussi peu d'états que possible.

Méthode

1. Construire une partition initiale Θ_0 de l'ensemble des états avec deux groupes : les états terminaux T et les états non-terminaux $Q-T$.
2. Procédure applicable à la partition courante Θ_i , à commencer par Θ_0 :

POUR chaque groupe G de \mathcal{O}_i **FAIRE**
début

partitionner G en sous-groupes de manière que deux états e et t de G soient dans le même sous-groupe ssi pour tout symbole $a \in A$, les états e et t ont des transitions sur a vers des états du même groupe de \mathcal{O}_i ;

/* au pire, un état formera un sous-groupe par lui-même */

remplacer G dans par tous les sous-groupes ainsi formés ; on obtient la partition de l'étape suivant, \mathcal{O}_{i+1} ;

fin

- Si $\mathcal{O}_{i+1} = \mathcal{O}_i$ alors $\mathcal{O}_{final} = \mathcal{O}_i$ et continuer à l'étape 4. Sinon, répéter l'étape (2) avec \mathcal{O}_{i+1} comme partition courante.
- Choisir un état dans chaque groupe de la partition \mathcal{O}_{final} en tant que représentant de ce groupe. Les représentants seront les états de l'automate fini déterministe réduit D' .

Soit e un état représentatif, et supposons que dans D il y a une transition $e \xrightarrow{a} t$.

Soit r le représentant du groupe de t (r peut être égal à t).

Alors D' a une transition de e vers r sur a ($e \xrightarrow{a} r$).

L'état initial de D' est le représentant du groupe qui contient l'état initial i de D ; les états terminaux de D' sont des représentants des états de T .

Pour tout groupe G de \mathcal{O}_{final} , soit G est entièrement composé d'états de T , soit G n'en contient aucun.

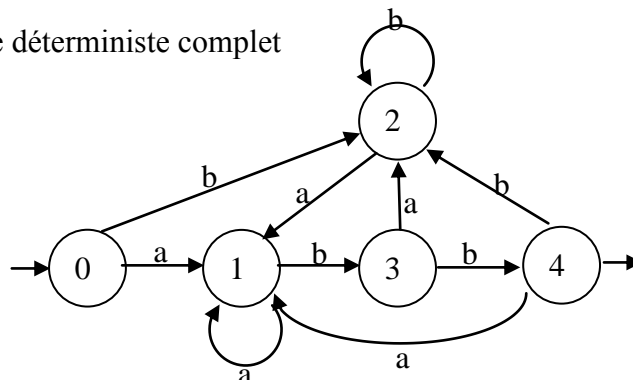
Remarque

En réalité, il est parfois plus facile, au lieu de choisir un représentant, marquer les groupes finaux comme tels, ou bien les renommer par, par exemple, A,B, C ... , et remplacer dans les transitions tout état par le nom de son groupe :

Si $e \xrightarrow{a} r$, $e \in A$, $r \in B$ où les groupes $A, B \in \mathcal{O}_{final}$, alors dans l'automate minimisé on a

$A \xrightarrow{a} B$ où maintenant on considère A et B comme états de l'automate minimisé. Cette remarque deviendra tout à fait claire à la fin de l'exemple suivant.

Exemple 1. Minimisons l'automate déterministe complet



décrit par le tableau de transitions suivant :

état	a	b
0	1	2
1	1	3
2	1	2
3	2	4
4	1	2

L'unique état terminal : 4.

Donc, la partition initiale : $\Theta_0 = \{(0, 1, 2, 3), (4)\}$

Notons les groupes non terminal et terminal : $I = \{(0, 1, 2, 3)\}$ et $II = \{(4)\}$

On ne peut pas, évidemment, essayer de séparer le groupe II qui consiste déjà en un seul état. On regarde donc dans quel groupe tombent les transitions à partir des états du groupe I :

état	a	b
0	I	I
1	I	I
2	I	I
3	I	II

Donc, le groupe I se sépare en deux, et on a $\Theta_1 = \{(0, 1, 2), (3), (4)\}$.

Notons les groupes (en recyclant la notation) : $I = \{(0, 1, 2)\}$, $II = \{(3)\}$, $III = \{(4)\}$.

Maintenant essayons de séparer le groupe I en regardant où tombent les transitions à partir de ses états dans les termes de la séparation $\{(0, 1, 2), (3), (4)\}$.

état	a	b
0	I	I
1	I	II
2	I	I

Donc, le groupe I se sépare en deux, et on a $\Theta_2 = \{(0, 2), (1), (3), (4)\}$.

Notons les groupes (en recyclant la notation) : $I = \{(0, 2)\}$, $II = \{(1)\}$, $III = \{(3)\}$, $III = \{(4)\}$.

Essayons de séparer le groupe I en regardant où tombent les transitions à partir de ses états dans les termes de la séparation $\{(0, 2), (1), (3), (4)\}$.

état	a	b
0	II	I
2	II	I

Le groupe I ne se sépare pas, Θ_3 reste identique à la séparation de l'étape précédent :

$\Theta_3 = \Theta_2 = \{(0, 2), (1), (3), (4)\}$.

Fin de la procédure itérative de séparation.

Voici les itérations qu'on a effectuées :

Etape 1 : $\Theta_{\text{courant}} = \{(0, 1, 2, 3), (4)\}$

$\Theta_{\text{new}} = \{(0, 1, 2), (3), (4)\}$

Etape 2 : $\Theta_{\text{courant}} = \{(0, 1, 2), (3), (4)\}$

$\Theta_{\text{new}} = \{(0, 2), (1), (3), (4)\}$

Etape 3 : $\Theta_{\text{courant}} = \{(0, 2), (1), (3), (4)\}$

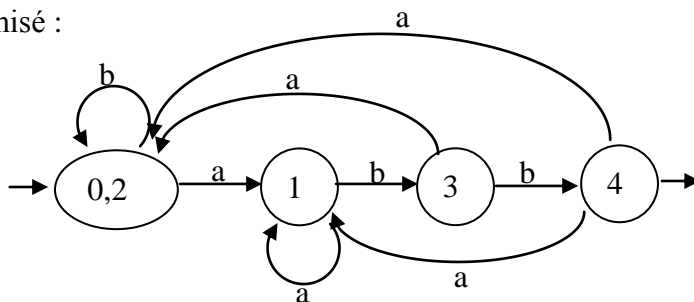
$\Theta_{\text{new}} = \{(0, 2), (1), (3), (4)\} = \Theta_{\text{final}}$

Passons aux représentants :

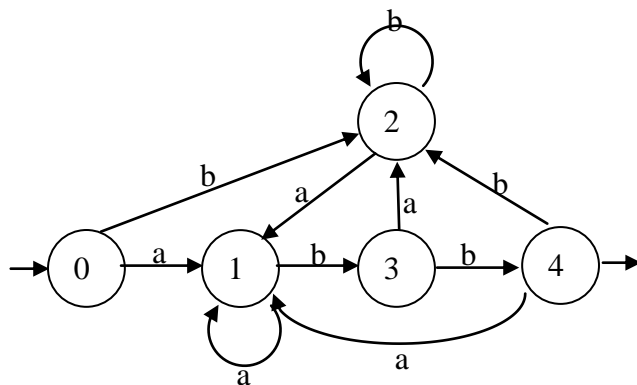
groupe	représentant
I	0 ou 2
II	1
III	3
IV	4

Il devient clair maintenant qu'on peut marquer les états de l'automate minimisé soit par un représentant, soit par les chiffres I, II, III, IV suivant le groupe du dernier étape, soit par le contenu du groupe (dans ce cas, l'état initial sera marqué (0,2) ; cette dernière solution est pratique tant que le groupe consiste en peu d'états).

L'automate minimisé :



On peut maintenant poser la question suivante : pourquoi les états 0 et 2 ont resté ensemble après la minimisation ? Qu'y a-t-il de spécial concernant ces deux états par rapport aux autres ? Regardons à nouveau l'automate initial :



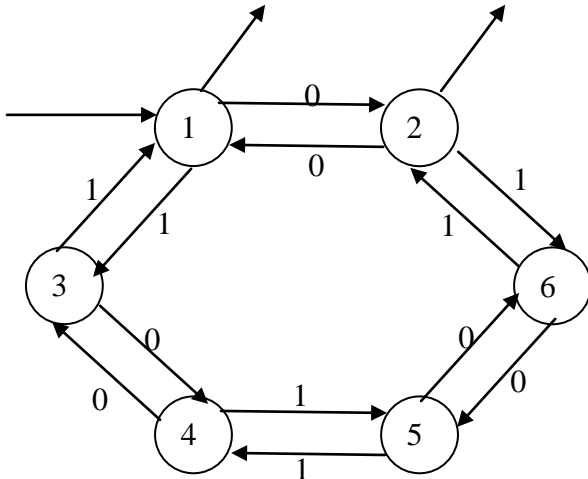
et introduisons la terminologie suivante :

on dit que la chaîne w **distingue** l'état s de l'état t si quand on commence dans l'état s et lit w on arrive dans un état terminal, et si on commence dans t et lit w on arrive dans un état non terminal ou vice-versa.

Ici, tous les états peuvent être distingués par une chaîne ou une autre, sauf les états 0 et 2. C'est facile à voir : et à partir de 0, et à partir de 2 on arrive en 1 en lisant un nombre quelconque (y compris zéro) de b et un a ; puis, comme on est dans le même état (1), il nous restent que les mêmes chaînes pour arriver à l'état final (ici, il y en a un seul). Donc, les états non distinguables se fondent dans un même état (en l'occurrence (0,2)) de l'automate minimisé.

En fait, on peut montrer que l'algorithme de minimisation qu'on a expliqué, est basé sur la recherche des tous les groupes qui peuvent être distingués par une chaîne ou une autre.

Exemple 2 Voici un automate déterministe complet avec deux états terminaux, avec l'alphabet $A=\{0,1\}$:



La même procédure de minimisation donne :

$$I = \{1\} \quad T = \{1, 2\}$$

$$\Theta_0 = \{(1,2), (3, 4, 5, 6)\} = \{I, II\}$$

$$\Theta_1 = \{(1, 2), (3, 6), (4, 5)\} = \{I, II, III\} \text{ (en recyclant les chiffres romains)}$$

$$\Theta_2 = \Theta_1$$

Voici l'automate minimisé :

