Soutien Maths pour l'Info (A)

DE 1 Avril 2008

Question :

Etape 1 $n=0 \rightarrow P(0) \rightarrow$ prouver qu'elle est vraie
Etape 2 On suppose $P(n)$ vraie et on démontre $P(n+1)$ vraie

Question 1 :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

$$\underbrace{\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{n-1}{n!} + \frac{n}{(n+1)!} \stackrel{?}{=} 1 - \frac{1}{(n+1)!}}$$

Démontrons par récurrence

Etape 1 ; $\mathbb{N}^* \Rightarrow P(1) \Rightarrow \frac{1}{2} \stackrel{?}{=} 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Etape 2 : Supposons vraie, démontrons "n+1"

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!} \quad (H)$$

$$(n+1) \rightarrow \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{(k+1)!} \stackrel{?}{=} 1 - \frac{1}{(n+2)!}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!}} + \frac{n+1}{(n+2)!}$$

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}} + \frac{n+1}{(n+2)!}$$

$$= 1 - \frac{1}{(n+1)!} + \frac{n+1}{(n+2)!} \quad \left(ex: 1 - \frac{1}{7!} + \frac{7}{8!}\right)$$

$$= 1 - \frac{(n+2)}{(n+2)(n+1)!} + \frac{n+1}{(n+2)!}$$

$(n+2)!$

$$= 1 + \frac{(-n-2)+(n+1)}{(n+2)!} = 1 - \frac{1}{(n+2)!}$$

donc vrai pour $n+1$

Exercice 4

$15x \equiv 21 [27]$ → 27, 54, 81, 108

et
15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120
-15, -30, -45, -60, -75, -90, -105, -120

~~$15x \times 5 \equiv 21 \times 5 [27]$~~
~~$81x \equiv 105 [27]$~~

$\cancel{3} \times 5x \equiv \cancel{3} \times 7 [\cancel{3} \times 9]$

$5x \equiv 7 [9]$

$\times 2$ on multiplie pas car 2 premier avec 9

$10x \equiv 14 [9]$

$9x + x \equiv 5 [9]$

$x \equiv 5 [9]$

Exercice 5

inverse de 28 modulo 41

Méthode 1 Analytique

$28a \equiv 1 [41]$

28	41
56	82
84	123
112	164
140	205
168	
196	

... pas possible

Solution Maths pour l'info
DE 1 Avril 2008

(2)

Méthode 2 : Euclide étendu :
faisons : PGCD (28, 41)

$a = 41 = \overset{b}{28} \times 1 + 13$

$28 = 13 \times 2 + 2$ PGCD(41,28) = 1

$13 = 2 \times 6 + \boxed{1}$ premiers entre-eux

$\cancel{2} = 2 \times \cancel{1} + 0$

$aU + bV = PGCD(a, b)$

On repart de l'autre sens : (sauf la dernière)

$1 = 13 - 2 \times 6$

$2 = \cancel{b} - 13 \times \cancel{2}$

$13 = \cancel{a} - \cancel{b} \times 1$

$1 = 13 - 2 \times 6$

$1 = 13 - [b - 13 \times 2] \times 6$

$1 = 13 - b6 + \underline{13 \times 2 \times 6}$

$1 = 13(1 - 6b + 12)$

$1 = 13 \times (13 - 6b)$

~~$13(a-b)(a-b-6b)$~~

$1 = 13(a - b) \cancel{(a-b)} - 6b$

$1 = a.13 - b.13 - 6b$

$1 = a \times 13 - 19b$

On nous demande

Bezout

$a.13 + b(-19) = 1$

$U = 13$ $V = -19$

Inverse

$1 = 41(13) - 28.19$

$-28(19) = 1 - 41(13)$

$28(-19) = [41]\,1$

$28 \times \underset{41-19}{22} = 1[41]$

$9a \equiv 1 [21]$

$21 = 3\times 2 + \boxed{3}$ $PGCD(9,21) = 3$

$9 = 3\times 3 + 0$

$3 = 21\times(1) - 9(2)$

Puisque $21 \wedge 9 = 3 \neq 1$ alors il n'existe pas un inverse modulo 21

Exercice ~~2~~

~~$(a-b)\wedge(3a+7b) = (3b-a)\wedge(2a-14b)$~~

Methode 1

$165 = 3\times 55 = \boxed{3}\times 5\times 11$

$450 = 2\times 225 = 2\times\boxed{3}\times 75 = 2\times 3^2\times 25 = 2\times 3^2\times 5^2$

$324 = 2\times 162 = 2^2\times 81 = 2^2\times\boxed{3}^4$

plus grande puissance

$PGCD(165, 450, 324) = 3$

Methode 2 Euclide

Exercice 6 :

Euclide traditionnel

$$\begin{cases} a_0 = a & b_0 = b \\ a_0 = b_0 \cdot q_0 + r_0 \\ b_0 = r_0 \cdot q_1 + r_1 \\ r_0 = r_1 \cdot q_2 + r_2 \\ \vdots \end{cases}$$

$r_{n-2} = r_{n-1}\, q_n + r_n$

Etendu

$r_n = r_{n-2} - r_{n-1} \cdot q_n$

r_0 et q_0 donnés