

DE 1

Mathématiques pour l'informatique

Sans documents, sans calculatrice.

Première partie – Induction et récursivité

Exercice 1 (3 points)

Démontrez par récurrence que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n k \times k! = (n+1)! - 1$$

Exercice 2 (2 points)

Démontrez que pour tout entier naturel n , 9 divise $10^n - 1$.

Exercice 3 (5 points)

On définit la somme S_n par $S_n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$. On souhaite évaluer rapidement la valeur de S_n , pour des valeurs de x et de n données, sur une machine M.

1. Donnez une expression récursive de S_n . En déduire un algorithme récursif d'évaluation de cette somme, pour des valeurs de x et de n données, qui ne fait pas intervenir de calcul de puissances.
2. Déterminez une formule permettant d'exprimer et de calculer plus directement S_n en fonction de x et de n . *Indication : multiplier S_n par $(1-x)/(1-x)$, $x \neq 1$ ne change pas sa valeur.*
3. On suppose que notre machine M calcule x^n en effectuant $n-1$ multiplications de x par lui-même et qu'une multiplication équivaut (en temps de calcul) à 10 additions, considérées comme des opérations élémentaires. Comparez les temps de calcul de S_n sur M, en nombre d'opérations élémentaires, pour les trois expressions possibles.

Deuxième partie – automates finis

Exercice 4 (3 points)

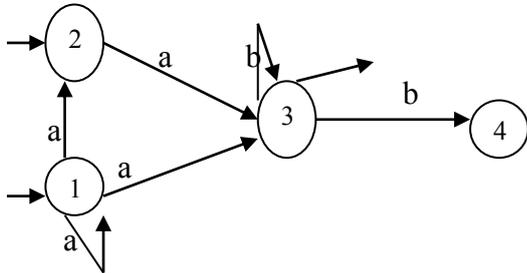
Construire des automates finis qui reconnaissent les langages suivants :

- a) L'ensemble des mots sur l'alphabet $A = \{a, b\}$ tels que $\{a^n b^m \mid n + m \text{ impair}, n \geq 0, m \geq 0\}$
- b) L'ensemble des mots sur l'alphabet $A = \{a, b, c\}$ tels que $\{a^n b^m c^k \mid n \geq 0, m \geq 0, k \geq 0\}$
- c) L'ensemble des mots sur l'alphabet $A = \{0, 1\}$ dont le premier symbole est 1 et avant dernier symbole est 0.

Exercice 5 (3 points)

$A = \{a,b\}$ est l'alphabet.

Soit A_1 l'automate représenté ci-dessous :



- Décrire $L(A_1)$ en langage ordinaire.
- Caractériser A_1
- Construire un automate déterministe et complet équivalent à cet automate.

Exercice 6 (2 points)

- Construire un automate reconnaissant les entiers écrits en base 2 divisibles par 6.
- Construire un automate reconnaissant les entiers écrits en base 10 divisibles par 4.

Exercice 7 (2 points)

Construire un automate fini reconnaissant l'ensemble des mots sur l'alphabet $A = \{a,b\}$ qui n'ont pas 'a' en avant dernière position.